

**Наталья Шелевальник,**

*дипломант Всероссийского конкурса «Новые задачи — новые решения» в номинации «Мы придумали задачу...»,  
ученица средней общеобразовательной школы № 29, г. Севастополь*

## ЗАДАЧА КАК ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА

В пособиях по математике для поступающих в вузы встречаются задачи, условия которых содержат избыточную информацию. В таких задачах лишние данные нередко могут быть обнаружены с помощью несложной программы, реализуемой на компьютере, особенно если решение можно привести к перебору всех возможных вариантов, удовлетворяющих определенным условиям. Из одной такой задачи можно образовать новые задачи, удаляя ту или иную часть избыточной информации. Продemonстрируем такой подход на примере задач из популярного сборника [3].

### Задача 1.

*Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 больше первого [3, с. 344].*

По нашему мнению, представляет интерес решение новой задачи, которая является вспомогательной для задачи 1:

*Найти все двузначные числа, каждое из которых равно неполному квадрату суммы своих цифр.*

В такой постановке задача может быть успешно решена с помощью программы, написанной, например, на Паскале.

Вспользуемся развернутой формой записи двузначного числа в десятичной системе счисления [1, с. 7]:

$$10x + y, \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  — неизвестные цифры, удовлетворяющие условиям:

$$1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9.$$

Выражение для неполного квадрата суммы цифр такого числа:

$$x^2 + xy + y^2.$$

```
program E1;
var x, y: integer;
begin
  for x:=1 to 9 do
    for y:=0 to 9 do
      if 10*x+y=x*x+x*y+y*y then
        writeln('Otv: ', 10*x+y);
    end.
```

```
Otv: 13
Otv: 63
Otv: 91
```

Вернемся теперь к исходной задаче 1. Очевидно, что двумя числами, отличающимися на 50, являются 13 и 63.

Итак, в условии задачи 1 информация о существовании трех двузначных чисел — лишняя. Именно поэтому данная задача более естественно может быть сформулирована по-новому:

*Среди двузначных чисел, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр, найти два числа, одно из которых на 50 больше другого.*

### Задача 2.

*Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число [3, с. 342].*

Фраза «взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр» означает, что рассматривается неполный квадрат разности (выражение для неполного квадрата разности:  $x^2 - xy + y^2$ ).

Поэтому сначала сформулируем и решим следующую вспомогательную задачу:

*Найти все двузначные числа, каждое из которых равно неполному квадрату разности своих цифр.*

Используя запись двузначного числа в виде (1) с указанными выше ограничениями на неизвестные числа, преобразуем программу E1 из задачи 1, заменив в ней знак «плюс» перед произведением  $x*y$  на знак «минус».

Тогда новая программа E2 примет вид:

```
program E2;
var x, y: integer;
begin
  for x:=1 to 9 do
    for y:=0 to 9 do
      if 10*x+y=x*x-x*y+y*y then
        writeln('Otv: ', 10*x+y);
    end.
```

```
Otv: 37
Otv: 48
```

Теперь, исключив из условия задачи 1, например, информацию о том, что в частном получится 3, найдем двузначное число, используя, во-первых, только информацию из первого предложения в условии задачи 1 о целочисленном остатке 7 и, во-вторых, результат решения вспомогательной задачи, приводящей к ответам 37 и 48. Из этих двух чисел нужно выбрать то, остаток от деления которого на сумму его цифр равен 7. Поскольку:

$$37 = 3 \cdot (3 + 7) + 7 \text{ и } 3 + 7 > 7,$$

$$48 = 4 \cdot (4 + 8),$$

число 37 будет решением задачи с новой формулировкой:

*Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в остатке получится 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.*

Аналогично приходим к выводу, что число 37 будет решением другой модифицированной задачи:

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найдите это число.

Для решения этой задачи рассмотрим новую задачу, удалив из условия задачи 2 второе предложение («Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число»):

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Найдите это число.

В этом случае при прежних обозначениях цифр двузначного числа программа примет вид:

```
program E3;
var x, y: integer;
begin
  for x:=1 to 9 do
    for y:=0 to 9 do
      if 10*x+y=3*(x+y)+7 then
        writeln('Otvvet: ', 10*x+y);
      end.
Otvvet: 10
Otvvet: 37
```

Как показывает проверка, решение 10 — постороннее, а решение 37 проверка подтверждает:  $(3 + 7) > 7$ . Итак, 37 — искомое число.

Отметим, что в такой формулировке задачу легко решить и без составления программы. Действительно, в этом случае математической моделью задачи (при прежних обозначениях) является уравнение:

$$10x + y = 3(x + y) + 7,$$

или после преобразования:

$$7(x - 1) = 2y.$$

Из последнего уравнения видно, что  $y$  делится на 7. Так как  $y$  — цифра, получаем, что  $y = 7$ . Подставляя это значение в последнее уравнение, находим:  $x = 3$ . То есть 37 — искомое число.

### Задача 3.

Найти двузначное число, такое, что если его разделить на произведение цифр, из которых оно составлено, то в частном получится  $16/3$ , а если вычесть из него 9, то разность будет также двузначным числом, которое отличается от искомого числа только порядком следования цифр [3, с. 337].

Сформулируем задачу по-новому:

Найти двузначное число, такое, что если его разделить на произведение цифр, из которых оно составлено, то в частном получится  $16/3$ .

При записи двузначного числа в виде (1) программа реализации решения примет вид:

```
program E4;
var x, y: integer;
begin
  for x:=1 to 9 do
    for y:=0 to 9 do
      if (10*x+y)/(x*y)=16/3 then
        writeln('Otvvet: ', 10*x+y);
      end.
end.
```

Otvvet: 32

Итак, в результате получен однозначный ответ, не противоречащий отброшенной информации, которая оказалась лишней.

Рассмотрим решение задачи с укороченной формулировкой без составления программы. Математической моделью задачи в этом случае будет уравнение:

$$(10x + y) / (xy) = 16/3,$$

или после преобразования:

$$3(10x + y) = 16xy,$$

причем  $y \neq 0$ , так как делить число на  $xy = 0$  нельзя. Из последнего уравнения следует, что  $y$  — четное число. Выразив  $x$  через  $y$ , получим:

$$x = (3y) / (16y - 30).$$

Подставляя в это равенство вместо  $y$  ( $y \neq 0$ ) четные числа 2, 4, 6, 8, убедимся в том, что  $x$  является цифрой только при  $y = 2$ , при этом  $x = 3$ . Следовательно, искомое число — 32.

### Задача 4.

Даны два двузначных числа, из которых второе обозначено теми же цифрами, что и первое, но написанными в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно 1,75. Произведение первого числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше второго числа. Найдите эти числа [3, с. 331].

Удалим из условия задачи 4 второе предложение («Частное от деления первого числа на второе равно 1,75») и используем для записи двузначного числа выражение (1).

Тогда программа примет вид:

```
program E5;
var x, y: integer;
begin
  for x:=1 to 9 do
    for y:=0 to 9 do
      if (10*x+y)*x=(3.5)*(x+10*y) then
        writeln('Otvvet: ', ' x=', x, ' y=', y);
      end.
Otvvet: x=2 y=1
```

Значит, искомые числа 21 и 12.

Отметим, что данная работа выполнена после изучения статьи [4] и ознакомления с документом [2], в котором подчеркнута, что «изучающие математику, включая информационные технологии, <...> должны уделять значительно больше времени, чем в настоящее время, решению творческих учебных и исследовательских задач».

### Литературные и интернет-источники

- Босова Л. Л., Босова А. Ю. Информатика: учебник для 8 класса. 2-е изд., испр. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
- Концепция развития математического образования в Российской Федерации. <http://www.rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html>
- Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М. И. Сканави. М.: Мир и образование, 2013.
- Хрусталева А. Ф. Задача как предмет исследования // Информатика в школе. 2015. № 6.