



В. Ф. Очков,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

Екатерина Горбунова, Марат Камалов, Екатерина Каршина,

Ксения Попова, Виктория Рыбникова, Дмитрий Сокунов,

ученики лицея № 1502 при Московском энергетическом институте

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ: ФИЗИКА + МАТЕМАТИКА + ИНФОРМАТИКА

Аннотация

В статье описана школьная лабораторная работа в русле междисциплинарных связей на стыке информатики, математики и физики: исследование провисания цепи — свободной и нагруженной, а также моделирование канатной подвесной дороги.

Ключевые слова: провисающая цепь, парабола, Mathcad, решение алгебраических уравнений, цепная функция, канатная подвесная дорога, анимация.

Контактная информация

Очков Валерий Федорович, доктор тех. наук, профессор, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-71-71; *e-mail:* ochkov@twt.mpei.ac.ru

V. F. Ochkov,

National Research University MPEI, Moscow

CATENARY: PHYSICS + MATHEMATICS + INFORMATICS

Abstract

The article describes school laboratory work in the context of interdisciplinary links at the junction of informatics, mathematics and physics: the study of the sagging of the free chain and loaded chain, and also the modeling of a cableway.

Keywords: sagging chain, parabola, Mathcad, solution of algebraic equations, catenary, cableway, animation.

В статье [6] было сказано, что если взять в руки за два конца металлическую цепь, растянуть ее, показать провисание цепи школьникам или студентам и спросить их, на что это похоже с точки зрения математики, то большинство ребят скажут, что это *парабола*. И в этом нет ничего удивительного — даже Галилей (1564–1642) одно время так считал, но потом, правда, усомнился в том, что цепь провисает по параболе. И только примерно полстолетия спустя после смерти Галилея в конце XVII века три великих математика — швейцарец Иоганн Бернулли (1667–1748), немец Готфрид Лейбниц (1646–1716) и голландец Христиан Гюйгенс (1629–1695) почти одновременно и независимо друг от друга вывели функцию, описывающую провисание цепи. Давайте и мы попытаемся еще раз доказать, что цепь провисает не по параболе, проведя несложные физические эксперименты с реальной цепью и последующую компьютерную обработку результатов опытов.

1. Как провисает цепь?

На рисунке 1 показано, как два школьника (соавторы этой статьи) прижали к доске металлическую цепь за два ее конца так, чтобы она свободно провисала, но не покачивалась. В этом окружении форма цепи напоминает... улыбку! А учеба немислима без улыбки — без удовольствия, получаемого на занятиях. Надеемся, что наш урок на стыке математики, физики и информатики не только будет интересен и полезен, но и окажется приятным.

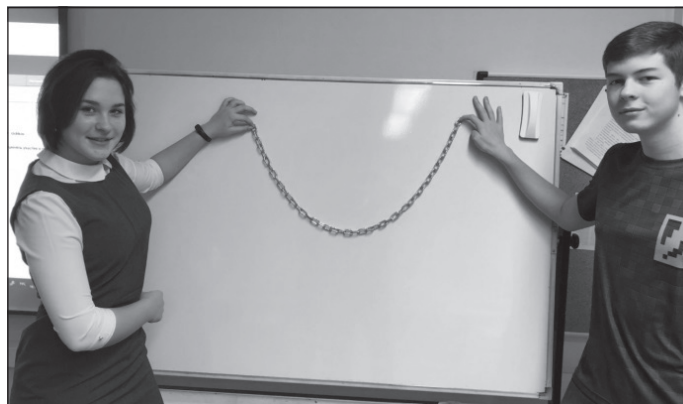


Рис. 1. Одна цепь, два лицеиста и три улыбки

Но вернемся от эмоций к математике, физике и информатике.

Центральная часть изображения на рисунке 1 была скопирована и перенесена в среду Paint, где она была оцифрована.

вана следующим образом. К изображениям элементов цепи подводился курсор мыши, координаты которого (в пикселях) показывались в левом нижнем углу этого графического редактора (рис. 2).

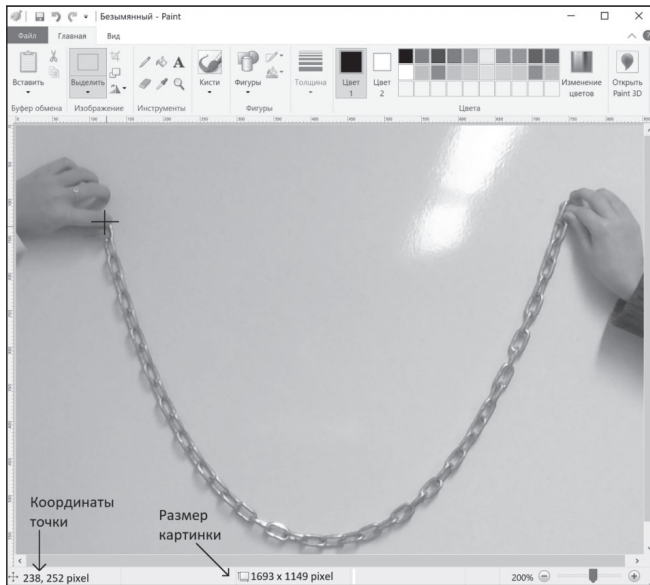


Рис. 2. Изображение провисающей цепи в среде графического редактора Paint

Из рисунка 2 видно, что курсор мыши находится на левом конце цепи — на 238-м пикселе от левого края картинки и на 252-м пикселе от ее верхнего края. Эти два числа были записаны как первые элементы векторов X и Y в среде математического пакета Mathcad 15 (рис. 3). (Оператор ORIGIN := 1 предписывает вести нумерацию элементов вектора от единицы, а не от нуля, как это имеет место по умолчанию.)

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad X := \begin{pmatrix} 238 \\ 386 \\ 833 \\ 1297 \\ 1477 \end{pmatrix} \quad Y := 1149 - \begin{pmatrix} 252 \\ 680 \\ 1107 \\ 735 \\ 252 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 897 \\ 469 \\ 42 \\ 414 \\ 897 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Два вектора с координатами провисающей цепи

Затем курсор мыши (рис. 2) перемещался на другую точку изображения провисающей цепи, и новая пара чисел (386 и 680) заносилась в векторы X и Y . Подобным образом были сняты координаты и других точек вплоть до последней (1477 и 252 — точка крепления цепи в правом ее конце). Мы оцифровали только пять точек на цепи. Их число можно увеличить, но это не сильно скажется на результатах нашего физико-математического компьютерного эксперимента. Можно определить длину между пикселями (рис. 2) и оперировать уже не безразмерными координатами, а реальными расстояниями в миллиметрах, сантиметрах или метрах. Но это не меняет суть нашего опыта и последующего расчета. Ниже мы будем оцифровывать изображение цепи на фоне миллиметровой бумаги и работать уже не с пикселями, а непосредственно с единицами длины — сантиметрами.

Следует упомянуть, что есть специальные программы, автоматизирующие процесс оцифровки изображений: пользователь последовательно щелкает мышью по кривой линии и автоматически получает два вектора

с координатами точек. Но у нас, повторяем, всего лишь пять точек, поэтому такую работу мы сделали вручную, воспользовавшись самым распространенным графическим редактором Paint.

На рисунке 3 показано, что значения элементов вектора Y вычитаются из величины 1149 (высота в пикселях картинки на рисунке 2). Это сделано для того, чтобы «перевернуть» ось Y : точка с нулевыми координатами на рисунке 2 находится в *верхнем* левом углу, а на наших последующих графиках она будет находиться в *нижнем* левом углу (точка начала координат в прямоугольной системе).

Известно, что параболу можно провести через три точки. Каноническое уравнение этой кривой второго порядка в прямоугольной системе координат имеет вид $x^2 = 2p \cdot y$, где p — это фокальный параметр, который равен расстоянию от фокуса до директрисы параболы [6]. Есть и более привычная («школьная») квадратичная формула для этой кривой: $y = ax^2 + bx + c$. Но мы будем использовать еще одну — менее известную, но более подходящую для нашей задачи формулу: $a \cdot (x - x_h)^2 + h$ — см. первый оператор на рисунке 4. Y функции с именем y_p один аргумент — x и три параметра: a , x_h и h . Конечно, с позиций математики и информатики у этой функции просто четыре аргумента: x , a , x_h и h . Деление аргументов на собственно аргументы и параметры мы сделали с позиций физики задачи.

Параметр a отвечает за форму и «крутизну» кривой: при $a > 0$ мы имеем «провисающую» параболу, а при $a < 0$ — параболу в виде арки. При значении a , стремящемся к нулю, парабола будет «снизу или сверху» стремиться к прямой, параллельной оси X .

Параметры x_h и h фиксируют координаты вершины параболы: минимум провисающей кривой или максимум кривой в виде арки.

На рисунке 4 показано, как были найдены значения параметров a , x_h и h , при которых парабола проходит через первую (левый край цепи), третью (нижний край) и пятую (правый край) точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Для этого была составлена система трех алгебраических уравнений, которые решаются численно в среде пакета Mathcad 15 с использованием встроенной функции *Find* и ключевого слова *Given*.

Функция *Find* меняет значения своих аргументов, начиная от первого предположения, заданного пользователем ($a := 1$, $x_h := 800$, $h := 50$), так, чтобы три уравнения превратились в три тождества. Вернее, почти в тождества: правые и левые части уравнений должны отличаться друг от друга не более чем на заданную малую величину. По умолчанию (а мы его не меняли) эта величина равна 0,001. Первые предположения для параметров x_h и h взяты, исходя из предполагаемых координат минимума искомой параболы: 50 и 800. Для параметра a первое предположение (единица) взято слегка «наобум». Главное, чтобы оно было больше нуля («провисающая» парабола, а не арка). Если бы мы использовали привычную квадратичную формулу для параболы $y = ax^2 + bx + c$, то задавать первые предположения для коэффициентов (параметров) a , b и c было бы сложнее. Этим и объясняется применение нами несколько необычной формы записи параболы на рисунке 4.

Полученное решение системы уравнений можно перенести на место первого предположения и убедиться, что решение ($a = 2,231 \cdot 10^{-3}$, $x_h = 857,5$ и $h = 40,661$) не изменится.

$$y_p(x, a, x_h, h) := a \cdot (x - x_h)^2 + h$$

$$a := 1 \quad x_h := 800 \quad h := 50$$

Given

$$Y_1 = y_p(X_1, a, x_h, h) \quad Y_5 = y_p(X_5, a, x_h, h)$$

$$Y_3 = y_p(X_3, a, x_h, h)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ x_h \\ h \end{pmatrix} := \text{Find}(a, x_h, h) = \begin{pmatrix} 2.231 \times 10^{-3} \\ 857.5 \\ 40.661 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными

На рисунке 5 можно видеть, как наша парабола проходит через точки, «снятые» с фотографии цепи: три точки она «пронизывает» (они обведены двойными кружочками), а около двух точек проходит рядом. Это следует и из графика, и из значений, показанных правее графика: вторая точка отстает от параболы по вертикали на 68 пикселей, а четвертая — на 58 пикселей. Отсюда вывод: цепь провисает не по параболе, а по какой-то другой кривой, достаточно близкой к параболе (см. начало статьи).

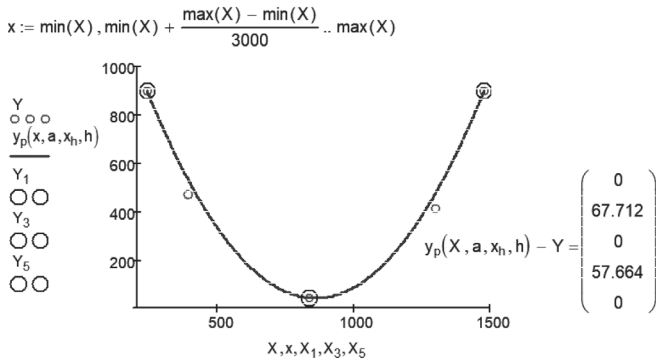


Рис. 5. Парабола проходит через три точки

Рисунок 5 отображает процесс *интерполяции*: кривая проходит *через* три точки. А рисунок 6 иллюстрирует процесс *аппроксимации* (приближения): кривая проходит не через три избранные точки, а *вблизи* всех пяти точек.

На рисунке 6 решается *переопределенная* система — система пяти алгебраических уравнений с тремя неизвестными a, x_h и h . Функцию *Find* здесь уже нельзя использовать, так как она вернет не решение задачи (корень системы — вектор с тремя численными значениями, см. рис. 4), а сообщение об ошибке: «Решение не найдено». Для таких случаев в пакете Mathcad предусмотрена функция *MinErr* (минимальная ошибка). Ее также можно применить для решения систем уравнений, но в случае отсутствия решения (а это наш случай на рисунке 6) функция *MinErr* возвращает не сообщение об ошибке, а значения своих аргументов, которые наиболее близки к решению — дают минимальную ошибку, минимальное отклонение левых и правых частей уравнений (невязка системы уравнений).

Но опять же — наша новая парабола, параметры которой ненамного отличаются от параметров первой параболы, прошла не через точки, а вблизи них, что

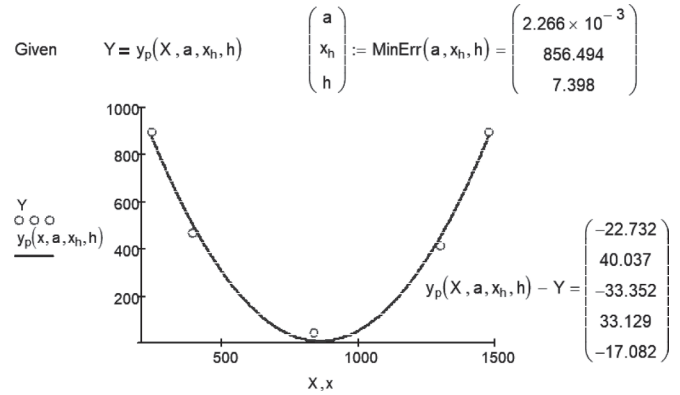


Рис. 6. Парабола проходит вблизи пяти точек

заметно и на графике, и по числам, показанным правее него.

Через наши точки, расположенные на цепи, нужно проводить не параболу, а линию, которая так и называется — *цепная линия*, ее открыли вышеупомянутые великие математики. Ее каноническая формула имеет один аргумент x и один параметр a : $a \cdot \cosh(x/a)$. В этой формуле задействован гиперболический косинус \cosh . Что это за функция? Есть такое редкое животное *овцебык*. С овцой его роднит густая шерсть, а с быком — размеры. Гиперболический косинус перенял от отдельной ветви гиперболы свою «провисающую» форму или форму арки. Но не от традиционной «школьной» гиперболы $y = 1/x$, а от «школьной» гиперболы, повернутой на 90° . Косинусом же функция \cosh называется потому, что она, подобно обычному косинусу, имеет первую производную, равную синусу — гиперболическому синусу \sinh , но без смены знака [7]. В свою очередь производная гиперболического синуса равна гиперболическому косинусу. Гиперболический косинус — это $(e^x + e^{-x})/2$, где e — это основание натурального логарифма 2,718281828...**. Гиперболический же синус — это $(e^x - e^{-x})/2$. Правда, гиперболические функции в отличие от своих тригонометрических «тезок» периода не имеют. «Период» имеет цепь, подвешенная на ряд столбиков — например, на ограду памятника.

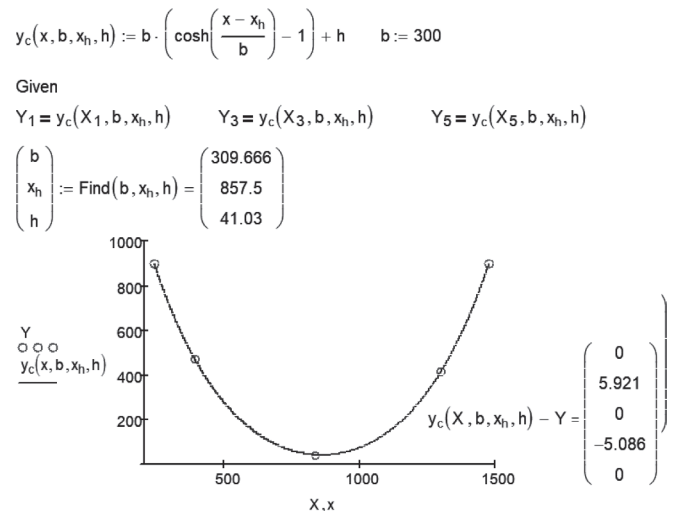


Рис. 7. Цепная линия проходит точно через пять точек

* В решении на рисунке 6 записано одно уравнение $Y = y_p(X, a, x_h, h)$. Но переменные X и Y — это не скаляры (как на рисунке 4: X_1, Y_1, X_3, Y_3, X_5 и Y_5), а векторы с пятью элементами. Пакет Mathcad может так интерпретировать уравнение с векторами.

** Запомнить просто: 2,7 плюс два раза... Лев Толстой (т. е. год его рождения — 1828).

В решении на рисунке 7 мы задействовали не каноническое уравнение цепной линии, а уравнение, где присутствуют параметры b , x_h и h , фиксирующие минимум цепной функции, когда она отображает провисающую цепь ($b > 0$), или максимум цепной функции, когда она отображает арку в виде цепи ($b < 0$). (Имя параметра a заменено на b , чтобы не было путаницы с параболой.)

Из рисунка 7 видно, что если в нашей задаче параболу заменить на цепную линию, то кривая *точно* пройдет через все пять точек нашей провисающей цепи! Вернее, почти точно: тут нужно учитывать погрешности, связанные с не совсем точным ручным определением координат цепи (см. рис. 2) и с возможными искажениями при ее фотографировании (см. рис. 1).

Само же уравнение цепной линии получается в результате решения дифференциального уравнения, описывающего баланс сил, действующих на элементарный участок цепи: силы, растягивающие (провисающая цепь) или сжимающие его (арка в виде цепи), уравновешиваются весом самого этого участка. Вывод уравнения цепной линии можно найти в книге [1].

Векторы X и Y можно дополнить новыми элементами, значения которых снимаются так, как показано на рисунке 2. Все эти новые точки должны точно лечь на кривую цепной функции, показанную на рисунке 7. Вернее, почти точно — с учетом, повторяем, вышеописанных погрешностей.

2. Цепные веса

На рисунке 8 показано изображение провисающей цепи, снятой на фоне не классной доски, а миллиметровой бумаги. К цепи на ниточке подвешена гирька

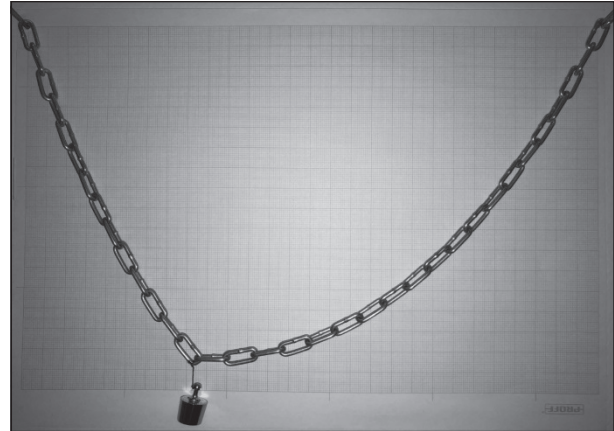


Рис. 8. Фотография цепи с грузиком на фоне миллиметровой бумаги

массой 10 г. Требуется определить (оценить) длину цепи и ее массу, сняв и обработав ее дискретные координаты.

Примечание. Фотография цепи выглядит не совсем горизонтальной из-за не совсем горизонтального положения фотоаппарата (смартфона) при съемке. Но линии на миллиметровке вполне горизонтальные и вертикальные, что очень важно для нашего эксперимента. Это положение бумаги проверялось уровнем, который встроено в смартфон.

На рисунке 9 показан Mathcad-документ с расчетом параметров двух отрезков цепной линии справа и слева от грузика. Координаты отдельных точек цепи хранятся в четырех векторах X_1 , Y_1 и X_2 , Y_2 . Здесь индексы 1 и 2 не фиксируют номера элементов в векторе, как это было в решении на рисунке 4, а являются просто текстовыми

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 8.4 \end{pmatrix} \text{ cm} \quad Y_1 := \begin{pmatrix} 17 \\ 10.3 \\ 6.5 \\ 1.7 \end{pmatrix} \text{ cm} \quad X_2 := \begin{pmatrix} 8.4 \\ 15 \\ 20 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ cm} \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 1.7 \\ 2.9 \\ 6.3 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

$$y(x, b, xh, h) := h + b \cdot \left(\cosh\left(\frac{x - xh}{b}\right) - 1 \right)$$

$$\text{Given } \begin{pmatrix} b \\ xh \\ h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 100 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ cm} \quad Y_1 = y(X_1, b, xh, h) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ xh_1 \\ h_1 \end{pmatrix} := \text{Minerr} \left(\begin{pmatrix} b \\ xh \\ h \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 13.16 \\ 21.94 \\ -5.92 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

$$\text{Given } Y_2 = y(X_2, b, xh, h) \quad (b_2 \ xh_2 \ h_2) := \text{Minerr} (b \ xh \ h) = (12.48 \ 9.54 \ 1.66) \text{ cm}$$

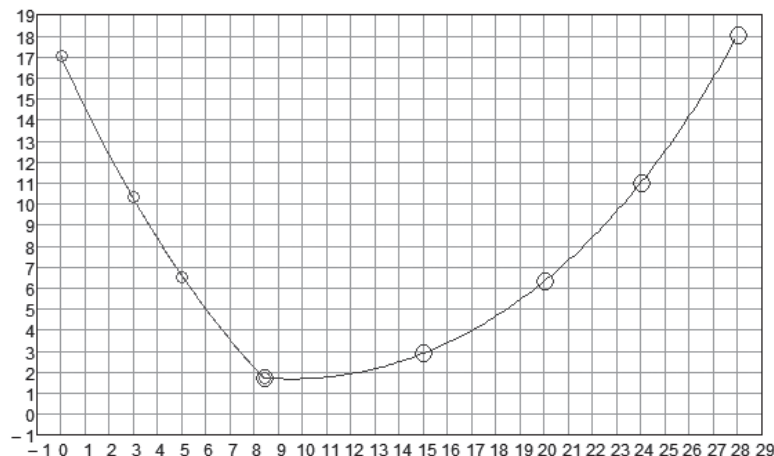


Рис. 9. Геометрия провисающей цепи с грузиком

индексами — частью имени переменной, сдвинутой вниз. Векторы X_1 , Y_1 и X_2 , Y_2 хранят величины уже не в пикселях (см. первую часть статьи), а в единицах длины — в сантиметрах, снятых непосредственно с миллиметровки. Вследствие этого найденные параметры двух участков цепной линии b_1, xh_1, h_1 (левый участок) и b_2, xh_2, h_2 (правый участок) будут также размерными.

Функция *MinErr* в паре с ключевым словом *Given* помогла нам определить параметры двух участков цепной линии $b_1, xh_1, h_1, b_2, xh_2$ и построить соответствующие линии, проходящие через точки — см. рисунок 9.

Примечание. На рисунке 9 встроенная в Mathcad функция *MinErr* имеет в качестве аргумента не список искоемых неизвестных (как на рисунке 6), а вектор или матрицу с одной строкой.

На рисунке 10 показан расчет линейной массы цепи, к которой подвешена десятиграммовая гирька. Задача сводится к решению системы четырех алгебраических уравнений, описывающих следующие моменты:

1. Сумма вертикальных проекций сил, удерживающих цепь с гирькой в точках крепления ($F_{y1} + F_{y2}$), равна весу цепи и весу гирьки $g \cdot (G + S \cdot g_c)$, где g — это встроенная в Mathcad константа — ускорение свободного падения. Масса цепи — это произведение искомой линейной массы цепи g_c на ее длину S . Длина цепи определяется по известной формуле с интегралом, где фигурирует первая производная цепной функции, вид которой задан первым оператором на рисунке 10. В формуле производной «сидит» уже упоминавшийся нами гиперболический синус \sinh . Горизонтальные проекции сил, удерживающих цепь с гирькой в точках крепления (F_x), равны друг другу.

2. В левой точке подвеса цепи отношение силы F_{y1} к силе F_x равно косинусу угла, с которым цепь крепится

$$y'(x, b, xh) := \frac{d}{dx} \left[h + b \cdot \left(\cosh \left(\frac{x - xh}{b} \right) - 1 \right) \right] \rightarrow \sinh \left(\frac{x - xh}{b} \right)$$

$$x_0 := \max(X_1) \quad L := 28\text{cm} \quad G := 10\text{gm}$$

$$S := \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (y'(x, b_1, xh_1))^2} dx + \int_{x_0}^L \sqrt{1 + (y'(x, b_2, xh_2))^2} dx = 44.662\text{cm}$$

$$g_c := 100 \frac{\text{gm}}{\text{m}} \quad F_x := 50\text{gmf}$$

$$F_{y1} := \frac{g \cdot (G + g_c \cdot S)}{2} = 27.331\text{gmf} \quad F_{y2} := F_{y1}$$

Given

$$F_{y1} + F_{y2} = g \cdot (G + g_c \cdot S)$$

$$\text{Left point } F_{y1} = -y'(0, b_1, xh_1) \cdot F_x$$

$$\text{Middle } G \cdot g = F_x \cdot (y'(x_0, b_2, xh_2) - y'(x_0, b_1, xh_1))$$

$$\text{Right } F_{y2} = y'(L, b_2, xh_2) \cdot F_x$$

$$\begin{pmatrix} g_c \\ F_x \\ F_{y1} \\ F_{y2} \end{pmatrix} := \text{Find}(g_c, F_x, F_{y1}, F_{y2}) \quad g_c = 69.493 \frac{\text{gm}}{\text{m}}$$

Рис. 10. Расчет линейной массы цепи, к которой подвешен грузик

к опоре, т. е. значению производной цепной функции в этой точке (со сменой знака, так как эта сила направлена влево, а не вправо).

3. Равенство п. 2 относится и к правой точке опоры цепи, но без смены знака производной (сила направлена вправо).

4. В точке крепления гирьки ее вес ($g \cdot G$ — произведение ускорения свободного падения на массу гирьки) уравнивается двумя силами, направленными по касательной к двум частям цепи в этой точке — влево и вправо.

Функция *Find* в паре с ключевым словом *Given* на рисунке 10 находит значения четырех неизвестных g_c , F_x , F_{y1} и F_{y2} , превращающих четыре вышеописанные уравнения в тождества.

Примечание. Символ «штрих» у производной вводится комбинацией клавиш Ctrl+F7.

Расчет, показанный на рисунке 10, выдал ответ: линейная масса цепи длиной 44,7 см, к которой подвешена гирька массой 10 г, равна 69,5 грамм на метр. На рисунках 11 и 12 показано, как эти величины (69,5 грамм на погонный метр и 44,7 см) проверены с помощью взвешивания цепи, снятой с миллиметровки, и измерения ее длины. Ответ (110,017 г / 156,9 см = 70,12 г/м) близок к ответу, полученному в результате расчета, — 69,493 г/м. Это говорит о хорошей сходимости результата нашего эксперимента на стыке физики, математики и информатики.



Рис. 11. Определение массы цепи



Рис. 12. Определение длины цепи

Задачу на рисунке 10 можно слегка изменить — задать линейную массу цепи и рассчитать массу грузика, к ней подвешенного. Так мы смоделируем некие *цепные веса*, озаглавившие данную часть статьи.

3. Канатная дорога

Выкладки, приведенные выше, позволяют нам сделать расчет и анимацию канатной подвесной дороги, фото которой можно видеть на рисунке 8.

Задача. Берется абсолютно гибкий и нерастяжимый трос длиной 46,6 см и с линейной массой 70 г/м, концы которого подвешиваются на высотах 17 и 18 см. Расстояние между точками подвеса троса по горизонтали — 28 см. На тросе на расстоянии x_0 от левой опоры подвешивается груз массой 10 г (см. рис. 8 и 9). Спрашивается, как провиснет трос (какова будет его форма) и какие силы будут растягивать трос в точках его крепления при изменении расстояния x_0 от нуля (старт движения груза по канатной дороге) до 28 см (финиш).

Примерно такую задачу (но не с сантиметрами и граммами, а с метрами и тоннами) решают инженеры при проектировании реальной, а не нашей игрушечной подвесной канатной дороги.

Решая эту задачу в среде Mathcad, можно и нужно сделать анимацию: перемещать груз вдоль троса и наблюдать, как меняются его форма, значения сил, удерживающих трос и груз на опорах, и другие параметры.

Ядро решения задачи показано на рисунке 13. Расчет нужно дополнить вводом исходных данных и значений первого предположения для блока *Given — Find*.

Задача о подвесной канатной дороге с двумя отрезками цепной линии и грузом сводится к решению системы девяти нелинейных алгебраических уравнений, четыре из которых учитывают геометрию конструкции, а пять — баланс сил и моментов сил. Вот эти уравнения, которые мы уже частично описали выше.

$$\begin{aligned}
 \text{Left point} \quad H_1 &= y(0m, b_1, x_{h1}, h_1) \\
 \text{Middle} \quad y(x_0, b_1, x_{h1}, h_1) &= y(x_0, b_2, x_{h2}, h_2) \\
 \text{Right} \quad H_2 &= y(L, b_2, x_{h2}, h_2) \\
 S &= \int_{0m}^{x_0} \sqrt{1 + (y'(x, b_1, x_{h1}))^2} dx + \int_{x_0}^L \sqrt{1 + (y'(x, b_2, x_{h2}))^2} dx \\
 F_{y1} + F_{y2} &= g \cdot (G + g_c \cdot S) \\
 \text{Left point} \quad F_{y1} &= -y'(0m, b_1, x_{h1}) \cdot F_x \\
 \text{Middle} \quad Gg &= F_x(y'(x_0, b_2, x_{h2}) - y'(x_0, b_1, x_{h1})) \\
 \text{Right} \quad F_{y2} &= y'(L, b_2, x_{h2}) \cdot F_x \\
 F_{y1}x_0 + F_x(H_2 - y(x_0, b_1, x_{h1}, h_1)) + \left. \begin{array}{l} M \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 1000 \\ \Delta L \leftarrow \frac{L - x_0}{n} \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} l \leftarrow \frac{\Delta L i + \Delta L(i - 1)}{2} \\ \Delta m \leftarrow g_c \Delta L \sqrt{1 + (y'(x_0 + l, b_2, x_{h2}))^2} \\ M \leftarrow M + g \Delta m l \end{array} \right. \\ M \end{array} \right\} &= F_{y2}(L - x_0) + F_x(H_1 - y(x_0, b_1, x_{h1}, h_1)) + \left. \begin{array}{l} M \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 1000 \\ \Delta L \leftarrow \frac{x_0}{n} \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} l \leftarrow \frac{\Delta L i + \Delta L(i - 1)}{2} \\ \Delta m \leftarrow g_c \Delta L \sqrt{1 + (y'(x_0 - l, b_1, x_{h1}))^2} \\ M \leftarrow M + g \Delta m l \end{array} \right. \\ M \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Рис. 13. Математическая модель подвешенного троса с грузом

Геометрия:

1. Левый участок троса крепится у левого столба и заканчивается в точке подвеса груза.

2. Правый участок троса начинается в точке подвеса груза и крепится у правого столба.

3. Два участка троса пересекаются в точке подвеса груза.

4. Сумма длин двух участков троса остается постоянной и равна заданному значению S .

Баланс сил:

5. Сумма вертикальных составляющих реакции опор ($F_{y1} + F_{y2}$) равна сумме веса цепи и веса подвешенного груза. Мы уже отмечали ранее (см. рис. 10), что две горизонтальные составляющие реакции цепи у опор равны ($F_{x1} = F_{x2} = F_x$), так как других горизонтальных сил в системе нет.

6 и 7. Если $F_{x1} = F_{x2} = F_x$ и известны значения производных двух цепных функции в точках опоры, то можно рассчитать значения F_{y1} и F_{y2} , принимая во внимание, что значение производной — это тангенс угла наклона касательной в данной точке.

8. В точке пересечения двух ветвей троса вес груза уравнивается двумя вертикальными силами от левой и правой ветвей цепи. В этом уравнении тоже участвуют значения производных, с помощью которых вертикальные составляющие сил выражаются через горизонтальные составляющие.

9. Равенство моментов сил, действующих на систему в точке пересечения ветвей цепи: три силы (F_{y1} , F_x у правой опоры и вес правой ветви цепи) разворачивают систему по часовой стрелке, а три другие силы (F_x у левой опоры, F_{y2} и вес левой ветви цепи) разворачивают

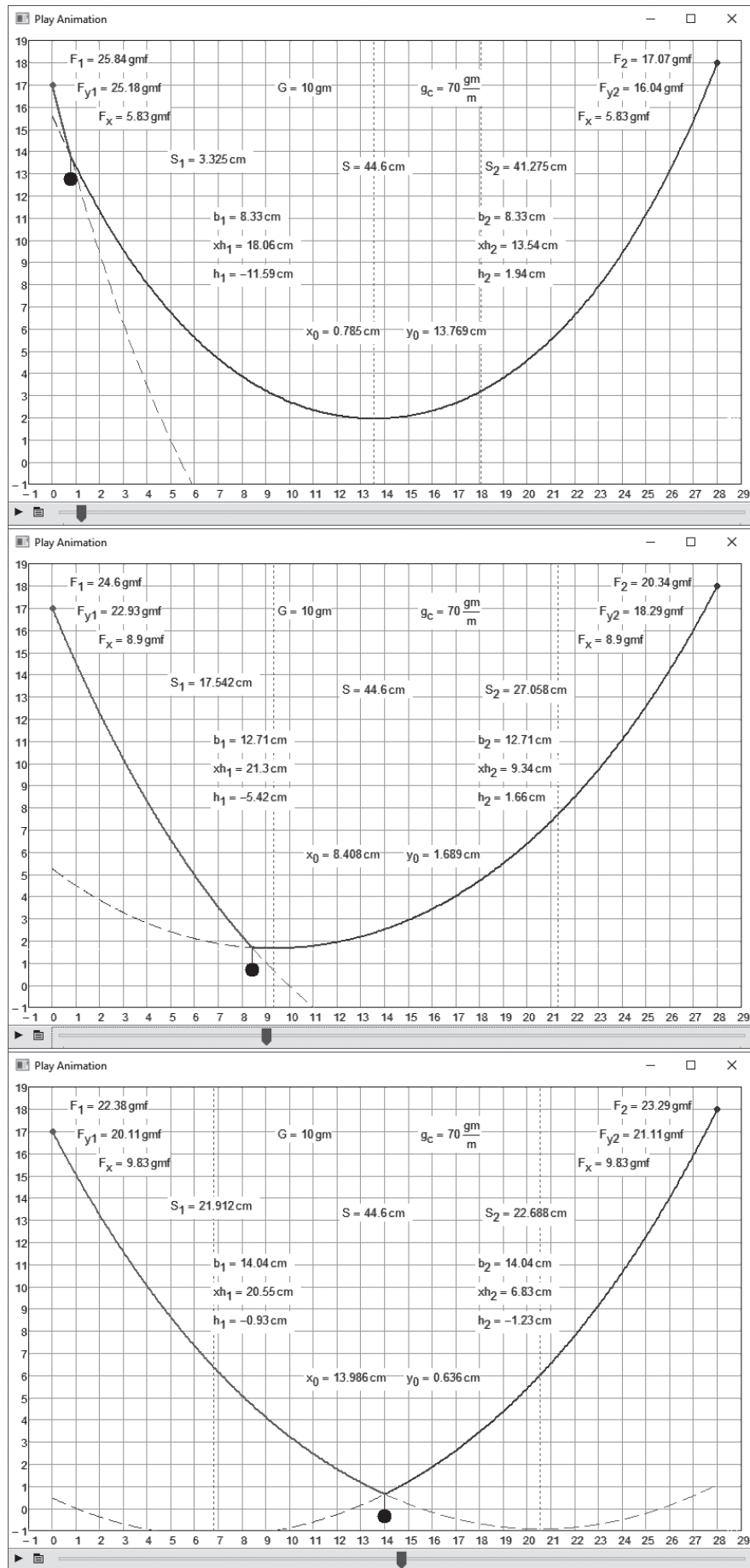


Рис. 14. Кадры анимации провисающего троса цепи с грузом. Второй (центральный) кадр отображает положение цепи/троса и гирьки, зафиксированное на рисунке 8 (физическая модель) и рисунке 9 (физико-математическая модель).

систему против часовой стрелки. Тут используется программирование: трос разбивается на отдельные маленькие элементы, моменты сил которых суммируются.

На рисунке 14 показаны три кадра анимации [2], полученные в результате решения задачи о тросе с подвешенным грузом. Сам файл с решением можно скачать с сайтов, указанных в конце статьи. Там же можно посмотреть и анимацию.

Нашу лабораторную работу можно усложнить в таких направлениях:

1. К цепи можно подвесить несколько грузиков в разных точках. Эту провисающую конструкцию нужно будет также сфотографировать (см. рис. 1), оцифровать на компьютере (см. рис. 2), обчислить и сравнить результаты расчета с фотографией цепи. При этом концы провисающей цепи можно крепить посредством ручных динамометров (безменов), которые продаются в хозяйственных магазинах. Эти устройства раньше были пружинными, а сейчас стали электронными (рис. 15), что существенно повысило точность измерения. Их используют, например, при контроле покупок на базаре (не обвесили ли меня?) или при взвешивании чемодана перед посадкой в самолет. В нашем эксперименте динамометры покажут, какие силы действуют на цепь в местах ее крепления.

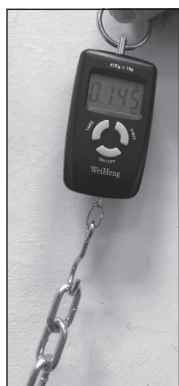


Рис. 15

2. Оттянуть грузик, показанный на рисунке 8, влево или вправо и смоделировать качание такого маятника. Тут придется решать не только алгебраические, но и дифференциальные уравнения [3].

3. Смоделировать движение грузиков (материальных точек) на цепи при обрыве цепи. Тут получится классический одиночный или множественный маятник.

Подход к решению этих задач дан в [5]. Такие эксперименты можно проводить не только на компьютере, но и реально, раскачивая подвешенную цепь и фиксируя ее движение видеосъемкой.

Сайты статьи с исходниками и анимацией:

<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Catenary-Physic-Math-IT/m-p/494899>

<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Find-and-an-array-as-argument/m-p/497397>

Список использованных источников

1. Меркин Д. Е. Введение в механику гибкой нити. М.: Физматлитиздат, 1980. http://know.alnam.ru/book_gth.php?id=10

2. Очков В. Ф. Живые кинематические схемы в Mathcad // Открытое образование. 2013. № 3. <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/kinematic.html>

3. Очков В. Ф., Богомолова Е. П. Это страшное слово «диффуры»... // Информатика в школе. 2015. № 1. <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf>

4. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. М.: Лань, 2016. (Этюд 7 «Цепная функция или пятый элемент».)

5. Очков В. Ф., Ленер Ф., Чудова Ю. В., Капитонец В. К., Тараканова Д. Ю. Физика vs информатика: веревочный многоугольник с гирьками в статике, кинематике и динамике, или Ньютон vs Лагранж // Cloud of Science. 2017. Т. 4. № 2. <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Polygon.pdf>

6. Очков В. Ф., Цуриков Г. Н., Чудова Ю. В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. 2017. № 4. <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Chain.pdf>

7. Янпольский А. Р. Гиперболические функции. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов. М.: Физматлит, 1960. <http://books.google.ru/books?isbn=545825953X>

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Уважаемые коллеги!

Статьи для публикации в журналах «Информатика и образование» и «Информатика в школе» должны отправляться в редакцию **только через электронную форму на сайте ИНФО (раздел «Авторам → Отправка статьи»):**

<http://infojournal.ru/authors/send-article/>

Обращаем ваше внимание, что для отправки статьи необходимо предварительно зарегистрироваться на сайте ИНФО (или авторизоваться — для зарегистрированных пользователей).

С требованиями к оформлению представляемых для публикации материалов можно ознакомиться на сайте ИНФО в разделе **«Авторам»:**

<http://infojournal.ru/authors/>

Дополнительную информацию можно получить в разделе **«Авторам → Часто задаваемые вопросы»:**

<http://infojournal.ru/authors/faq/>

а также в редакции ИНФО:

e-mail: readinfo@infojournal.ru

телефон: (495) 140-19-86