

**В. Ф. Очков,**

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

**А. В. Соколов, Ю. В. Чудова,**

лицей № 1502 при Московском энергетическом институте

## ...НА МАРСЕ БУДУТ ЯБЛОНИ ЦВЕСТИ

### Аннотация

В статье рассмотрены вопросы движения ракеты-носителя — одно- и двухступенчатой. Рассказано о формуле Циолковского, о выборе места для космодрома.

**Ключевые слова:** ракета, формула Циолковского, система дифференциальных уравнений.

### Контактная информация

**Очков Валерий Федорович**, доктор тех. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва; адрес: 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; телефон: (495) 362-71-71; e-mail: ochkov@twm.mpei.ac.ru

**Соколов Алексей Викторович**, учитель физики и астрономии лицея № 1502 при МЭИ, г. Москва; адрес: 111555, г. Москва, ул. Молостовых, д. 10А; телефон: (495) 307-11-61; e-mail: av\_sokol\_1502@mail.ru

**Чудова Юлия Владимировна**, методист лицея № 1502 при МЭИ, г. Москва; адрес: 111555, г. Москва, ул. Молостовых, д. 10А; телефон: (495) 300-00-20; e-mail: julia.chudova@gmail.com

**V. F. Ochkov,**  
National Research University MPEI, Moscow,

**A. V. Sokolov, Ju. V. Chudova,**  
Lyceum 1502, Moscow

### ...APPLE TREES WILL BLOSSOM ON MARS

#### Abstract

The article deals with the motion of the launch vehicle — one- and two-stage. It's told about Tsiolkovsky rocket equation and about the choice of location for the spaceport.

**Keywords:** rocket, Tsiolkovsky rocket equation, system of differential equations.

Есть такой советский культовый фильм «Девять дней одного года»\*. В нем нет погонь и драк, на которые «подсели» современные юные и уже не совсем юные зрители, а есть прекрасные диалоги в исполнении прекрасных актеров: Татьяны Лавровой, Иннокентия Смоктуновского, Алексея Баталова и др.

Вот один такой диалог из фильма — актеры Евгений Евстигнеев (физик-теоретик Николай Иванович) и Михаил Казаков (физик-романтик Валерий Иванович):

— Скажите, Валерий Иванович, как глубоко вы собираетесь забраться в глубины нашей галактики?

— На 500 световых лет.

— С какой скоростью?

— Близкой к скорости света.

— Вес корабля?

— Сто тысяч тонн.

— Горючее?

— Самое современное.

— Сейчас мы подсчитаем, сколько вам понадобится горючего.

Будьте добры, салфеточку.

...

— Николай Иванович, вы закончили свои подсчеты?

— Да, пожалуйста. При весе космического корабля сто тысяч тонн при скорости, близкой к скорости света, для облета части галактики в разумный для человеческой жизни срок вам потребуется десять в двадцать второй степени тонн самого современного экстрагорючего. Справка. Наша планета весит несколько меньше, счастливого пути!

Диалог, конечно, наивный, но представим себе, что Николай Иванович взял в руки не салфетку, а... «таблетку» (планшетный компьютер) с программой Mathcad [1, 2, 5–8] и он на ней делает расчеты (рис. 1).

$$v_{end} = I \cdot \ln \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \xrightarrow{\text{solve}, M_1} M_2 \cdot e^{\frac{v_{end}}{I}}$$

$$M_2 := 100 \cdot 1000 \text{ т}$$

$$v_{end} := 0.995 \cdot c = 298 \ 1000 \text{ км/с}$$

$$I := 777 \cdot 1000 \frac{\text{тс}}{\text{т/с}}$$

$$M := M_2 \cdot \exp \left( \frac{v_{end}}{I} \right) - M_2 = 1.003 \cdot 10^{22} \text{ т}$$

$$M_{Earth} := 5.97219 \cdot 10^{21} \text{ т}$$

Рис. 1. Предположение расчета на салфетке

В расчете на рисунке 1 использована формула Циолковского (кстати, сам Циолковский упоминается в фильме\*\*): конечная скорость ракеты  $v_{end}$

\* Его можно посмотреть на сайте: <http://kino-ussr.ru/main/217-devyat-dney-odnogo-goda-1961.html>. Название статьи — это, кстати говоря, строка из знаменитой песни тех времен. Ее распевали на улицах, когда встречали космонавтов после очередной космической экспедиции: «Утверждают космонавты и мечтатели, что...»

\*\* Персонаж Михаила Казакова (Валерий Иванович) в конце диалога бросает своему оппоненту (персонажу Евгения Евстигнеева) такую фразу: «Когда Циолковский проектировал свою ракету, то в ресторане “Яр” сидели ученые-скептики вроде вас и на салфеточках доказывали, что он сумасшедший».

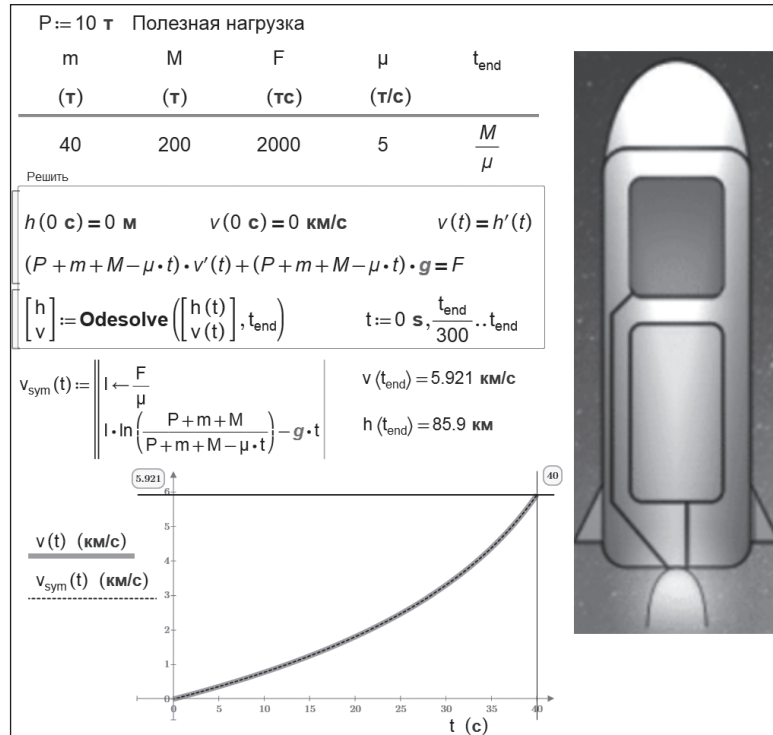


Рис. 2. Расчет скорости одноступенчатой ракеты

пропорциональна натуральному логарифму отношения стартовой массы ракеты  $M_1$  к ее конечной массе  $M_2$ . Разность же  $M_1 - M_2$  — это масса топлива и окислителя (далее — просто топлива, как в фильме). Коэффициент пропорциональности в этом уравнении (величина  $I$ ) — это отношение тяги двигателя  $F$  к массовому расходу топлива  $\mu$  (величины  $F$  и  $\mu$  мы будем использовать в дальнейших расчетах).

Мы приняли  $I$  равным 777 тысяч тонн силы/(тонн/секунды). Но в самом фильме эта цифра не озвучена, 777 тысяч — это наше предположение (три семерки на счастье!). Величина  $I$  — это также и скорость истечения газов из сопла ракеты (метры в секунду). Теоретическое значение этой скорости для ядерных ракетных двигателей может превышать 70 км/с. Скорость истечения для электрического двигателя может достигать 140 км/с. Поэтому вполне можно пометать и о «трех семерках».

Уравнение Циолковского на рисунке 1 решается относительно переменной  $M_1$ . Если конечная скорость ракеты будет близка к скорости света (мы приняли, что эта скорость равна 0,995 скорости света  $c$ ), то масса топлива и вправду превысит массу Земли ( $M_{\text{Earth}}$ ). Но расчет наш, конечно, очень грубый («наивный»). Кроме того, он не учитывает то важное обстоятельство, что при скоростях, близких к скорости света, формула Циолковского не работает. Тут нужно будет отходить от законов классической механики и прибегать к теории относительности Эйнштейна.

Но давайте опустимся с галактических высот к околоземному пространству, немного (в сотню раз) притормозим ракету и подсчитаем, какие параметры могут быть у реальных, а не у полужантаслических космических аппаратов.

Рисунок 2 демонстрирует попытку расчета скорости ракеты, имеющей стартовую массу 250 тонн, из которых 10 тонн — это полезная нагрузка ( $P$ ), 40 тонн — это масса пустой ракеты-носителя ( $m$ ), а 200 тонн — масса топли-

ва ( $M$ ). Тяга двигателя ракеты ( $F$ ) составляет 2000 тонн силы (тс) при расходе топлива 5 тонн в секунду (т/с —  $\mu$ ). При таких исходных данных двигатель будет работать 40 с ( $t_{\text{end}}$ ).

На рисунке 2 показано численное решение дифференциального уравнения: двигатель толкает ракету вверх, а вниз ракету тянет ее вес. И все это уравновешивается произведением массы ракеты на ее ускорение — на первую производную ее скорости по времени [3].

Численное решение дифференциального уравнения движения ракеты — сгенерированная по точкам функция  $v(t)$  — сравнивается на графике с аналитическим решением (с функцией  $v_{\text{sym}}(t)$ ), найденным с помощью пакета Maple (рис. 3). Этим действием мы фактически вывели формулу Циолковского, использованную в решении на рисунке 1, дополнительно вставив в нее учет ускорения свободного падения (веса ракеты). Но константа  $g$  — это не константа, а переменная величина, и об этом мы еще поговорим ниже.

*Примечание.* На графике на рисунке 2 прорисована не одна, а две кривые: толстая сплошная бледная и тонкая пунктирная черная внутри толстой кривой. Так проверяется совпадение численного и аналитического (символьного) решений дифференциального уравнения.

Если в уравнении вес ракеты  $(P + m + M - \mu \cdot t) \cdot g$  перенести в правую сторону со знаком «минус», то получится второй закон Ньютона в чистом виде. Матема-

$$\begin{aligned} \text{Диф\_уравнение} &:= (P + m + M - \mu \cdot t) \cdot (v'(t) + g) = I \cdot \mu \\ \text{Начальные\_условия} &:= v(0) = 0 \\ \text{dsolve}(\{ \text{Диф\_уравнение}, \text{Начальные\_условия} \}) \\ v(t) &= I \cdot \ln \left( \frac{M + P + m}{M + P + m - \mu t} \right) - g \cdot t \end{aligned}$$

Рис. 3. Вывод уравнения Циолковского

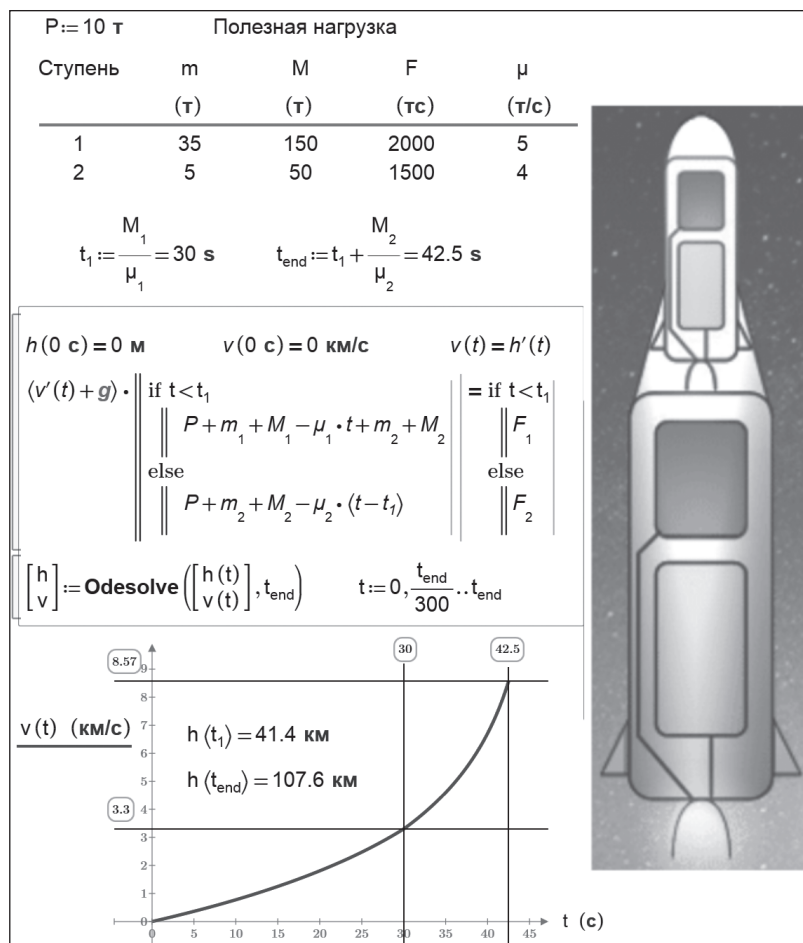


Рис. 4. Расчет полета двухступенчатой ракеты

тически, конечно же, это ничего не изменит, но будет нагляднее.

Из расчета на рисунке 2 видно, что скорость ракеты в конце работы двигателя (5,921 км/с) не достигает первой космической скорости ( $\approx 7,9$  км/с), и ракета после ее разворота на  $90^\circ$  (это делают дополнительные двигатели или гироскопы) полетит не по околоземной, а по баллистической орбите и скоро упадет на Землю.

Чтобы все-таки вывести наши 10 тонн полезной нагрузки на околоземную орбиту, можно увеличить запас топлива. Но лучше, не меняя запаса топлива, разделить ракету на две ступени (рис. 4).

Дифференциальное уравнение полета двухступенчатой ракеты будет содержать встроенные в Mathcad операторы if: если работает первая ступень с тягой  $F_1$ , то она несет полезную нагрузку  $P$ , сами две ступени ( $m_1$  и  $m_2$ ), топливо второй ступени  $M_2$  и расходуемое топливо первой ступени  $M_1 - \mu_1 \cdot t$ . Вторая же ступень (оператор else) с тягой  $F_2$  будет нести только полезную нагрузку  $P$ , себя саму  $m_2$  и расходуемое топливо  $M_2 - \mu_2 \cdot (t - t_1)$ , где  $t_1$  — время работы первой ступени, а  $t$  — общее время полета ракеты. При таком раскладе скорость ракеты в конце последовательной работы двух ступеней (8,57 км/с) превысит первую космическую скорость и спутник будет выведен на орбиту. При этом ракета (вернее, ее вторая ступень) поднимается на 107,6 км, а не на 85,9 км (одноступенчатый вариант).

Кривые, показанные на рисунках 2 и 4, похожи на... верхнюю образующую и ребра монумента покорителям космоса, установленного в Москве (рис. 5).

Интересно, заложена ли формула Циолковского в этот монумент или это случайное совпадение? Но сам Циолковский в виде памятника присутствует у подножия монумента.



Рис. 5. Монумент покорителям космоса

В расчетах на рисунках 2–4 сделано, конечно, много допущений\*: не учитывается действие на ракету потока воздуха, изменение величины ускорения свободного падения в зависимости от высоты и от географической широты. Кстати, о широте. Известно, что пуск ракет с Земли нужно осуществлять как можно ближе к экватору и разворачивать орбитальную станцию в восточном направлении. Во-первых, у экватора значение  $g$  меньше, чем на более высоких широтах, и, во-вторых и главных, ближе к экватору ракета получает больший дополнительный разгон за счет вращения Земли.

На рисунке 6 показано, какое значение дополнительной горизонтальной скорости получают ракеты при запуске их в восточном направлении из разных точек Земли — с пяти различных космодромов, а также с полюса и экватора. Если посмотреть на карте места расположения этих космодромов, то окажется, что восточнее их находятся места для падения ступеней ракет — океан или малонаселенная территория.

Есть еще один, «астрономический», фактор: плоскости орбит, не совпадающие с экваториальными, неустойчивы — возмущающее действие Земли, Луны и Солнца может «уронить» такой спутник.

Ракеты-носители имеют несколько ступеней не только для экономии топлива и не только для того, чтобы вывести на орбиту большую полезную массу при заданном количестве топлива, но и для того, чтобы отработанные части ракеты не выходили на орбиту, а падали в заданном районе или сгорали в плотных слоях атмосферы, не засоряя околоземное пространство. Об этом мало задумывались в начале космической эры, и сейчас это вылилось в большую проблему. Часто можно слышать о том, что космическая станция изменила свою орбиту, чтобы не столкнуться с «космическим мусором».

С дискуссией по использованию Mathcad для расчета ракет-носителей можно ознакомиться по адресу: <https://www.ptcusercommunity.com/thread/128503>. Там же размещены файлы с приведенными выше расчетами и сделана попытка расчета реальной ракеты-носителя «Союз» с тремя (вернее, с двумя с половиной) ступенями.

Сами же задачи, рассмотренные в статье, решались в рамках факультатива по применению современных

\* В принципе, можно было не учитывать и вес ракеты — произведение ее массы на ускорение свободного падения. Это допущение, как мы уже отметили, заложено в формулу Циолковского.

$R := 6370 \text{ km}$	$v(\phi) := \frac{2 \pi R \cdot \cos(\phi)}{\text{day}}$
Полюс := 90 °	$v(\text{Полюс}) = 0 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Плесецк := 63 °	$v(\text{Плесецк}) = 0.21 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Байконур := 46 °	$v(\text{Байконур}) = 0.322 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Цзюцюань := 41 °	$v(\text{Цзюцюань}) = 0.35 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Мыс_Канаверал := 28.5 °	$v(\text{Мыс_Канаверал}) = 0.407 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Куру := 5 °	$v(\text{Куру}) = 0.461 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Экватор := 0 °	$v(\text{Экватор}) = 0.463 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Рис. 6. Линейные скорости на поверхности Земли

систем компьютерной математики в лицее № 1502 при Московском энергетическом институте [4].

### Литературные и интернет-источники

1. Бгатова О. В. Применение Mathcad при обучении математике в колледже // Информатика и образование. 2007. № 11.
2. Очков В. Ф. Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование. 2013. № 2. <http://tw.tprei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath.pdf>
3. Очков В. Ф., Богомолова Е. П. Это страшное слово «диффуры»... // Информатика в школе. 2015. № 1. <http://tw.tprei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf>
4. Очков В. Ф., Чудов В. Л., Соколов А. В. Использование форума РТС Community/Mathcad на школьных занятиях по информатике // Информатика в школе. 2015. № 10. <http://tw.tprei.ac.ru/ochkov/PTC-Community-Лус.pdf>
5. Суханов М. Б. Применение пакета Mathcad в обучении программированию на языках высокого уровня // Информатика и образование. 2011. № 10.
6. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Якимович А. А. Mathcad и Excel для школьников: решение уравнений и неравенств // Информатика и образование. 2009. № 3–7.
7. Шамсутдинова Т. М. Программируем в системе Mathcad // Информатика и образование. 2006. № 5.
8. Шушкевич С. В. Обучение построению графических объектов в Mathcad // Информатика и образование. 2009. № 5, 6.

В 2016 году издательство «Лань» планирует выпустить учебное пособие:

**Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет.**

В пособии будут изложены основы применения математических методов, современных вычислительных средств (Mathcad, SMath и др.) и Интернета для решения типовых задач математики, физики, химии и других школьных и вузовских дисциплин.

Рассматриваемые задачи затрагивают вопросы решения уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных), программирования, статистики, обработки изображений, криптографии, решения головоломок, создания анимаций кинематических и динамических объектов, нечеткой логики, нечетких множеств, оптимизации и др.

Книгу можно рассматривать как пособие к новому зарождающемуся учебному курсу «Физико-математическая информатика» (ФМИ), объединяющему в школах и вузах преподавание информатики, математики, физики, химии и других дисциплин в эпоху всеобщей компьютеризации.

Книга будет полезна и интересна для школьников, студентов, аспирантов, преподавателей средних и высших учебных заведений и других специалистов, а также для всех тех, кто любит математику и компьютер.

Приведенная выше статья — это одна из тем данного пособия.