

DOI: 10.32517/2221-1993-2024-23-1-70-76

П. И. Совертков, Д. В. Печугина

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ГРУШ В СУШИЛКЕ*

Аннотация

Классические постановки задач о плотной упаковке предметов на плоскости в основном рассматривают расположение кругов или многоугольников в областях, имеющих контур в виде окружности, многоугольника или полосы. В данной статье впервые (насколько известно авторам) изучены различные модели расположения долей груши в сушилке и обсуждается переход к более плотной упаковке. Для сушки грушу предварительно нарезают на части. Рассматриваются разрезы вдоль осевой линии и перпендикулярно осевой линии. Подробно изучена простейшая модель пластины груши, контур которой состоит из двух дуг окружностей и двух отрезков. Один отрезок является частью общей касательной окружностей, а другой — частью осевой линии. Далее рассматриваются математические модели расположения груш на прямоугольном противне и в цилиндрической сушилке. Обсуждается оптимальное расположение в цилиндрической сушилке. Приведена компьютерная программа на языке PascalABC. Проведенное исследование может служить основой разработки проекта по математическому и компьютерному моделированию для учащихся средней школы при углубленном изучении математики и информатики. Тематика исследований доступна старшеклассникам, причем решение исследовательских проблем в дискретной геометрии может продолжить старшеклассник или студент.

Ключевые слова: математическая модель, компьютерная программа, PascalABC.

1. Постановка задачи

Стратегия научно-технологического развития Российской Федерации предполагает как вовлечение учащихся и студентов в исследовательскую деятельность посредством разработки исследовательских проектов, так и кадровое обеспечение для реализации национальных проектов в области образования и науки. В дискретной геометрии [3] существует много открытых проблем — проблем, которые просто формулируются, но окончательные решения которых пока

неизвестны. Эти проблемы доступны для понимания школьников и студентов, и иногда они моделируются и решаются методами, понятными на уровне старших классов школы.

В настоящей статье мы рассмотрим пример разработки проекта по близкой теме, связанной с плотной упаковкой груш. Это задача, связанная с реальной проблемой, возникающей в повседневной жизни, поэтому она может быть интересна для школьников при выполнении исследования в рамках проектной работы по математическому и компьютерному моделированию.

* Материалы к статье можно скачать на сайте ИНФО: http://infojournal.ru/journals/school/school_01-2024/

Контактная информация

Совертков Петр Игнатьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. преподаватель кафедры геометрии, факультет математики, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия; *адрес:* 191186, Россия, г. Санкт-Петербург, наб. реки Мойки, д. 48; *e-mail:* psovertkov@mail.ru

Печугина Диана Валерьевна, магистрант факультета математики, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия; *адрес:* 191186, Россия, г. Санкт-Петербург, наб. реки Мойки, д. 48; *e-mail:* dianapечугина@gmail.com

P. I. Sovertkov, D. V. Pechugina

Herzen State Pedagogical University, St. Petersburg, Russia

COMPUTER SIMULATION OF THE ARRANGEMENT OF PEARS IN THE DRYER

Abstract

Classical formulations of problems about dense packing of objects on a plane mainly consider the arrangement of circles or polygons in areas with a contour in the form of a circle, polygon or strip. In this article, for the first time (as far as the authors know), various models of the arrangement of pear lobes in the dryer are studied and the transition to tighter packaging is discussed. For drying, the pear is first cut into pieces. Sections along the center line and perpendicular to the center line are considered. The simplest model of a pear plate, the contour of which consists of two arcs of circles and two segments, has been studied in detail. One line is part of the common tangent of the circles, and the other is part of the center line. Next, mathematical models for the arrangement of pears on a rectangular tray and in a cylindrical dryer are considered. The optimal arrangement in a cylindrical dryer is discussed. A computer program in PascalABC language is provided. The study can serve as the basis for developing a project on mathematical and computer modeling for secondary school students with in-depth study of mathematics and informatics. Research topics are available to high school students, and the solution of research problems in discrete geometry can be continued by a high school student or university student.

Keywords: mathematical model, computer program, PascalABC.



Рис. 1. Пример расположения долек груш в цилиндрической сушилке

Разработка проекта проходит в несколько этапов [1, 7, 10]. Программирование при этом играет важную роль как инструмент формирования вычислительного мышления [2, 5]. Поиск темы проекта иногда начинается с практической задачи [8, 9].

Укладывая на даче дольки груш в сушилку (рис. 1), мы уже моделируем оптимальное их расположение, чтобы заполнить наибольшую площадь на диске сушилки. Простейшая практическая деятельность может служить толчком для разработки проекта.

Как и большинство людей, математики и информатики любят груши. Но, помня первые строки учебника геометрии, они часто отвлекаются от фактического содержания груши, в частности, от вкуса груши, и изучают совершенную форму груши, созданную природой. Но вкус груши запоминается надолго, и тогда мы начинаем вспоминать, что и в сушеном виде этот вкус частично сохраняется.

Процесс сохранения фруктов и ягод имеет важное стратегическое значение для дачников и пищевой промышленности. Выделим наиболее важные направления сохранения фруктов и ягод: сушка, заморозка, консервирование, сохранение в особых условиях на небольшой срок в помещениях с определенной газовой смесью. Фрукты и ягоды вызревают в течение небольшого срока (например, месяца или нескольких недель). Часть фруктов и ягод употребляется сразу, а избыток хочется сохранить.

Пусть груши подготовлены для сушки, т. е. рассортированы по размерам, вымыты, просушены от излишней влаги и разрезаны на небольшие доли вдоль осевой линии (рис. 2), относительно которой грушу можно считать почти симметричной.

Конечно, после разрезания на доли эти части груши имеют пространственную форму, но нас будет интересовать рациональная укладка для сушки, а поэтому для изучения поставленной задачи мы сосредоточим внимание на проекции этих долей на поверхность некоторой сушилки.

Под *оптимальной* укладкой мы будем понимать такое расположение долей, при котором на данной области сушилки грушами заполнена наибольшая площадь.

Некоторые примеры плотной упаковки продуктов в стеклянных банках при консервировании рассмотрены

в [8, с. 152–161]. В данной статье мы покажем возможное применение математики для моделирования расположения пластин груш на сушилке, а затем применим компьютерное моделирование.

Наверно, самая удобная организация сушки фруктов, причем без лишних затрат электроэнергии, — это сушка на прямоугольном противне в солнечный день. В настоящее время прямоугольный противень применяется в электросушилках. Но он обладает определенным недостатком — фрукты высыхают неравномерно в центре и по краям противня.

В средней полосе России для ускорения сушки нужны повышенная температура и вентиляция. Часто используются цилиндрические сушилки, в которых фрукты располагаются концентрическими рядами (рис. 3). Вентилятор с обогревом, расположенный внизу сушилки, равномерно создает поток воздуха, по крайней мере, для каждого кругового ряда фруктов.

На основе многочисленных наблюдений можно сформулировать *«аксиому грушевого дерева»*: *грушевое дерево порождает подобные груши*.

Конечно, есть некоторые редкие экземпляры, нарушающие это наблюдение, но мы будем считать это влиянием некоторых условий, которые в дальнейшем не участвуют в рассмотрении.

Используя подобие фигуры груши, возможно размещение груш концентрическими кольцами на сушилке.

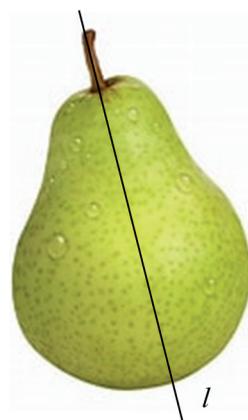


Рис. 2. Осевая линия одной груши

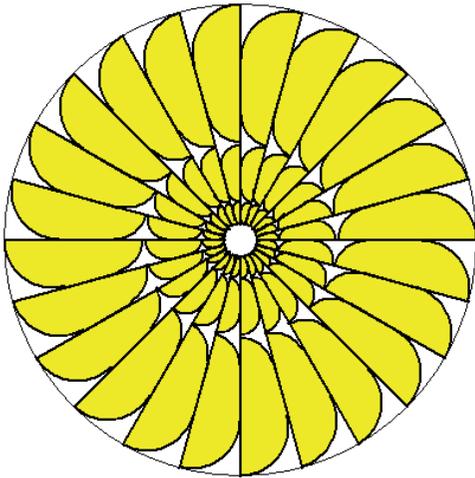


Рис. 3. Заполнение диска сушилки концентрическими рядами и секторами

По краю диска сушилки укладываются груши больших размеров, а далее к центру сушилки размеры груш уменьшаются. В центре диска сушилки есть сквозное отверстие, которое не заполняется долями груши. Для упрощения модели пластины груши будем считать, что сердцевина груши не вырезается, а семена груши выпадают при ее разрезании.

2. Математическая модель

Для построения простейшей модели проекции пластины груши на плоскость (при которой ось груши параллельна плоскости проекции) будем считать, что контур ограничен двумя дугами окружностей AK_A и BK_B , отрезком K_AK_B касательной к окружностям и отрезком AB осевой линии груши (рис. 4).

Пусть радиусы окружностей равны $O_AK_A = a$, $O_BK_B = b$ и расстояние между центрами окружностей равно $O_AO_B = c$. Этими тремя параметрами простейшая модель груши полностью определяется. При увеличении параметра c груша становится более продолговатой. Зависимость между параметрами a , b и c в виде $(a - b) : c$ характеризует наклон касательной к оси груши, т. е. определяет конусообразный вид груши.

Пусть известен радиус диска сушилки $OA = R$.

Будем считать, что по кругу сушилки укладывается целое число n пластин и они заполняют кольцо на диске сушилки без перекрытий и касаются друг друга, поэтому угол u (рис. 4) в данном случае равен $\frac{2\pi}{n}$.

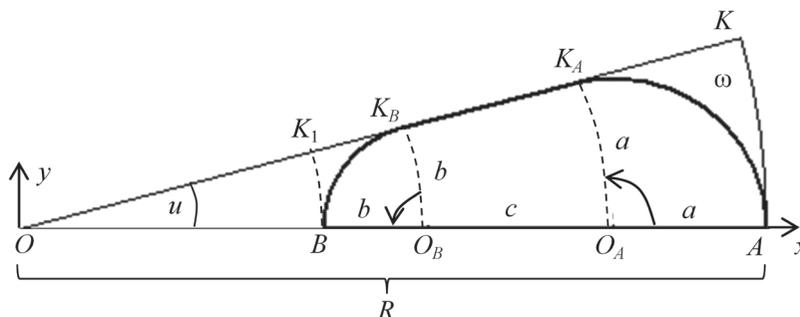


Рис. 4. Модель груши в секторе

Итак, на первом этапе моделирования нам кажется, что удобно выбрать пять параметров: a , b , c , R и n .

Для построения дуг окружностей нужно указать величины изменения центральных углов:

$$\angle AO_AK_A \in \left[0; \frac{\pi}{2} + u\right], \quad \angle K_BO_BB \in \left[\frac{\pi}{2} + u; \pi\right].$$

После того как одно кольцо пластин построено, требуется далее заполнить следующий круговой ряд на диске сушилки с меньшим радиусом $OB = OA - AB = R - (a + b + c)$, и все повторяется аналогично, что должно реализовываться в компьютерной программе с помощью рекурсии.

Но при переходе к следующему круговому ряду начальные параметры груши должны уменьшаться, так как следующий круговой ряд образован подобными долями груши. Итак, возникает понимание того, что все пять параметров связаны некоторой зависимостью в данной конкретной модели.

Из прямоугольного треугольника OO_AK_A следует:

$$\begin{aligned} \sin u &= \frac{O_AK_A}{OO_A} = \frac{a}{R - a}, \\ a &= \frac{R \sin u}{1 + \sin u}. \end{aligned} \quad (1)$$

На небольшой выборке реальных груш определим отношение $m = \frac{c}{a}$, тогда $c = ma$, где m — некоторая константа для данного сорта груш.

Из прямоугольного треугольника OO_BK_B следует:

$$\begin{aligned} \sin u &= \frac{O_BK_B}{OO_B} = \frac{b}{R - a - c}, \\ b &= (R - a - c) \sin u. \end{aligned} \quad (2)$$

Для рисунка 3 с хорошо уложенными долями груши в ряды выбираются следующие независимые параметры:

- R — радиус сушилки;
- n — число долей груши в круговом ряду, т. е. число секторов на диске для укладки груш;
- m — коэффициент конусообразности на реальной груше.

Далее вычисляются параметры груши a и b по формулам (1) и (2), чтобы получить рисунок 3.

3. Компьютерная реализация

Программа построения изображения, приведенного на рисунке 3, написана на языке PascalABC (см листинг).

```

Program grusha;           {название программы}
Uses GraphABC;          {вызов графического редактора}
Var n,u,i,j,x0,y0,xOA,yOA,xOB,yOB,xKA,yKA,xKB,yKB: Integer;
    m,a,b,c,R,ur,k:real; {переменные}
Begin
x0:=300; y0:=200;       {точка отсчета, аналог начала системы координат}
R:=200;n:=24;          {радиус диска сушилки и число пластин в круговом кольце}
u:=360 Div n; ur:=u*pi/180; {градусная и радианная меры угла u}
m:=1.2; a:=R*sin(ur)/(1+sin(ur)); c:=m*a; b:=(R-a-c)*sin(ur); {параметры груши}
Arc (x0,y0,round(R),0,360); {построение контура круга сушилки}
For j:=1 To 3 Do Begin {цикл построения колец}
For i:=0 To n-1 Do Begin {цикл построения фигур внутри одного кольца}
xOA:=round((R-a)*cos(i*ur)); yOA:=round((R-a)*sin(i*ur)); {координаты центров дуг}
xOB:=round((R-a-c)*cos(i*ur)); yOB:=round((R-a-c)*sin(i*ur));
xKA:=round((R-a)*cos(i*ur)+a*cos(ur*(i+1)+pi/2));
yKA:=round((R-a)*sin(i*ur)+a*sin(ur*(i+1)+pi/2));
{координаты точек перехода от дуг к касательной}
xKB:=round((R-a-c)*cos(i*ur)+b*cos(ur*(i+1)+pi/2));
yKB:=round((R-a-c)*sin(i*ur)+b*sin(ur*(i+1)+pi/2));
SetPenWidth(2); {выделение жирной линией контура груши}
Line (x0+round(R*cos(i*ur)),y0-round(R*sin(i*ur)),x0+round((R-a-c-b)*cos(i*ur)),_
_y0-round((R-a-c-b)*sin(i*ur))); {построение отрезка АВ}
Arc(x0+xOB,y0-yOB,round(b),90+u*(i+1),180+u*i); {построение дуги с центром ОВ}
Arc(x0+xOA,y0-yOA,round(a),u*i,90+u*(i+1)); {построение дуги с центром ОА}
Line (x0+xKA,y0-yKA,x0+xKB,y0-yKB); {построение касательной}
FloodFill(x0+round((R-a)*cos(i*ur)+a*cos(ur*i+pi/2)/2),_
_y0-round((R-a)*sin(i*ur)+a*sin(ur*i+pi/2)/2),clYellow); {закраска пластины груши желтым
цветом}
End;
k:=(R-a-b-c)/R; R:=k*R;a:=k*a; b:=k*b; c:=k*c; {переход к следующему круговому кольцу}
End; End.

```

Листинг. Программа построения изображения, приведенного на рисунке 3

Более подробно прочитать о компьютерном моделировании на языке PascalABC и познакомиться с многочисленными примерами можно в работах [4, 6, 8].

Отметим два следующих обстоятельства.

Во-первых, вместо простейшей модели груши для рисунка 4 можно построить модель, лучше отражающую форму груши, а именно отразить прогиб на рисунке 2, заменив касательную $K_A K_B$ (рис. 4) дугой параболы или окружности.

Во-вторых, в действительности укладка пластин груш может значительно отличаться от построенной на рисунке 3 укладки, так как разрез груши на доли может осуществляться другим способом. Рассмотрим этот способ подробнее.

4. Моделирование альтернативного способа укладки

Если разрез груши выполняется перпендикулярно оси груши, то получаем круги (вернее, круговые цилиндры с небольшой высотой). Их расположение на диске сушилки представлено на рисунке 5.

Для освоения аналогичного моделирования нужно сначала разработать математическую модель рисунка 5, на котором построено несколько концентрических колец окружностей, а затем написать компьютерную программу построения такого рисунка.

На рисунке 6 во внешнюю большую окружность ω радиуса R вписано n окружностей (где $n \geq 3$) — получилось первое кольцо вписанных окружностей. Каждая из этих окружностей в кольце касается двух соседних окружностей и внешней окружности, т. е. контура диска.

Далее с другой стороны строится окружность ω_1 , касающаяся всех окружностей первого кольца, и процесс

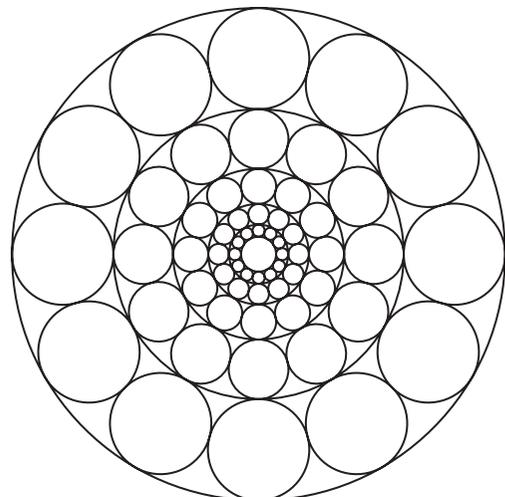


Рис. 5. Заполнение диска сушилки круговыми пластинами груши

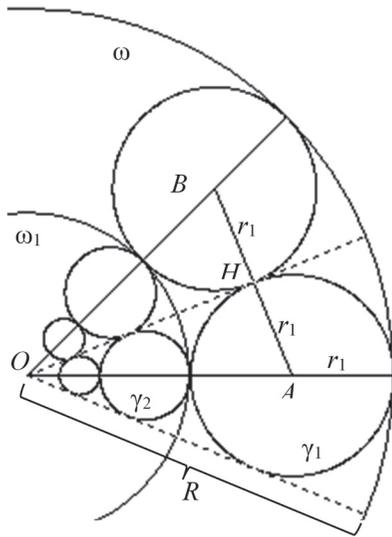


Рис. 6. Касание нескольких окружностей

построения нового кольца повторяется. Вдоль радиуса большой окружности получаем семейство подобных окружностей γ_1 и γ_2 . Используя параметры r и n , требуется найти радиус окружности в первом кольце и коэффициент подобия двух соседних окружностей вдоль радиуса большой окружности.

Разработка математической модели.

Рассмотрим две касающиеся окружности первого кольца (рис. 6) с центрами A и B и радиусами r_1 .

Центр O большой окружности, центр A окружности кольца и точка касания этих двух окружностей расположены на одной прямой, поэтому $OA = R - r_1 = OB$, $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$.

Пусть OH — высота равнобедренного треугольника AOB , тогда точка H является точкой касания двух окружностей кольца и

$$r_1 = HB = OB \cdot \sin \frac{\pi}{n} = (R - r_1) \sin \frac{\pi}{n},$$

$$r_1 = \frac{R \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} \text{ — радиус окружности первого венка.}$$

Радиус окружности ω_1 , касающейся первого кольца вписанных окружностей, равен:

$$R - 2r_1 = R - 2 \frac{R \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} R.$$

Две соседние окружности γ_1 и γ_2 с центрами на радиусе большой окружности подобны с тем же коэффициентом, что и две окружности ω и ω_1 .

Коэффициент подобия при переходе от окружности γ_1 к окружности γ_2 равен:

$$k = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Следует заметить, что коэффициент подобия не зависит от радиуса первоначальной окружности ω , а зависит только от количества окружностей в кольце.

Предлагаем самостоятельно написать компьютерную программу построения рисунка 5 и провести закрашку круговых колец.

5. Оптимизация модели

Но вернемся к понятию оптимального расположения долей груш. Пока этот термин имеет математическую основу в своем определении. Возможна другая схема расположения груш на диске — см. рисунок 7.

На ранее рассмотренной схеме (рис. 3) все пластины второго кругового ряда отобразим симметрично относительно биссектрис углов и получим схему расположения пластин груш, представленную на рисунке 7.

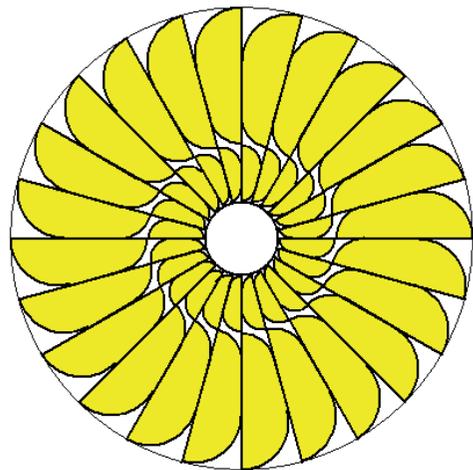


Рис. 7. Первая попытка оптимизировать заполнение диска

При таком положении пластин второго ряда образовалось свободное пространство между пластинами первого кругового и второго кругового рядов. Расположение пластин нужно сделать оптимальным для сушки, поэтому все пластины второго ряда нужно подвинуть к пластинам первого ряда. А так как желательно использовать такое расположение пластин, чтобы пластины касались, то правильнее сказать, что для второго ряда можно использовать подобные пластины немного больших размеров и сушка будет лучшей, что отражено на рисунке 8.

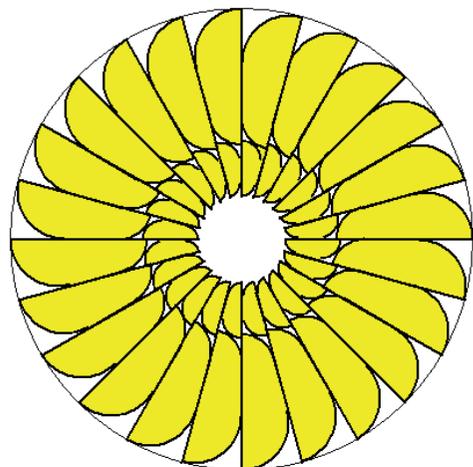


Рис. 8. Вторая попытка оптимизировать заполнение диска

6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

На прямоугольном противне с закругленными углами расположены круги с радиусами r в m горизонтальных и n вертикальных рядах. Напишите компьютерную программу построения рисунка 9, в которой можно изменять параметры r , m и n .

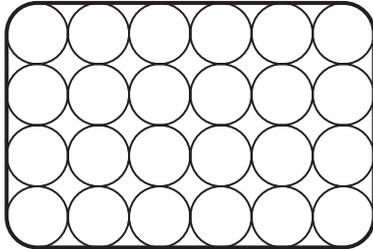


Рис. 9. Расположение кругов вплотную к краю противня

Задача 2.

На прямоугольном противне с закругленными углами расположены круги с радиусами r в m горизонтальных и n вертикальных рядах, причем между кругами и контуром противня имеется зазор шириной h , чтобы фрукты не пригорали по краям противня. Кстати, дно противня часто имеет закругления вдоль контура противня, и круги в этом случае невозможно разместить вплотную к краю противня. Напишите компьютерную программу построения рисунка 10, в которой можно изменять параметры r , m , n и h .

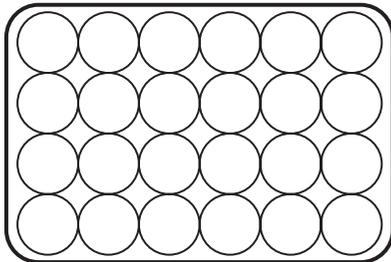


Рис. 10. Расположение кругов с отступом от края противня

Задача 3.

При моделировании обычно возникает много вопросов, на которые учащемуся приходится отвечать. Цель любого проекта — подвести обучающегося к такому состоянию, чтобы он сам начинал ставить задачи и пытаться их решать. На рисунке 9, наверно, можно еще расположить круги меньшего, но постоянного радиуса и касающиеся четырех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах квадратов. А как заполнить пространство вдоль контура противня кругами, касающимися контура и двух ближайших окружностей? Сформулируйте корректно задачи и попытайтесь написать соответствующие компьютерные программы.

Задача 4.

В радиально-кольцевых схемах расположения груш на рисунках 3, 5 и 8 существенно используется подо-

бие груш в двух соседних кольцах, что основано на использовании конкретных груш, собранных на даче, среди которых были подобные груши. Груши, купленные в магазине и отсортированные перед продажей, имеют приблизительно равные размеры. Разработайте компьютерное моделирование расположения таких груш для прямоугольного противня и цилиндрической сушилки.

Задача 5.

Некоторые утверждения в точных науках первоначально предъявляются на иллюстративном уровне. В данной статье переход к оптимальному расположению наглядно иллюстрировался с помощью переходов от рисунка 3 к рисункам 7 и 8. Для количественной оценки оптимизации всех переходов необходимо использовать важнейшую характеристику упаковки [3, с. 16] области D с помощью системы P покрывающих объектов, т. е. к плотности упаковки на плоскости:

$$d(P, D) = \frac{\sum_{C \in P} S(C \cap D)}{S(D)}.$$

В числителе дроби вычисляется сумма площадей пересечений всех объектов покрытия с данной областью D . Не загромождая данную статью вычислениями и оставляя возможность проявить себя для последующих исследователей в этом направлении, приведем некоторые пояснения для вычисления плотности заполнения области AKK_1B (рис. 4) одной пластиной груши, т. е.:

$$d = \frac{S_{AK_A K_B B}}{S_{AKK_1 B}},$$

$$S_{AKK_1 B} = S_{OAK} - S_{OBK} = \frac{\pi R^2}{n} - \frac{\pi(R-a-b-c)^2}{n},$$

$$S_{O_B K_B B} = \frac{b^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n} \right)}{2},$$

$$S_{O_A K_A A} = \frac{a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{n} \right)}{2},$$

$$S_{O_B O_A K_A K_B} = \frac{a+b}{2} \sqrt{c^2 - (a-b)^2}.$$

Далее для плотности заполнения используйте зависимость между параметрами по формулам (1) и (2). Потом вычислите плотность заполнения диска сушилки, учитывая, что реально на диске груши укладываются в два или максимум в три концентрических ряда.

Задача 6.

а) Проверьте, что круг, вписанный в правильный треугольник (рис. 11), образует покрытие с плотностью $d = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,6046$.

б) Проверьте, что круг, вписанный в квадрат (рис. 12), образует покрытие с плотностью $d = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$.

в) Проверьте, что круг, вписанный в правильный шестиугольник (рис. 13), образует покрытие с плотностью $d = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069$.

г) Плоскость можно замостить правильными треугольниками, или квадратами, или правильными шести-

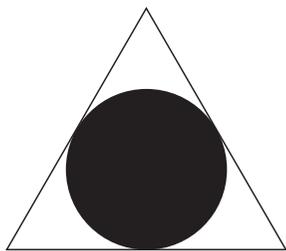


Рис. 11. Круг, вписанный в правильный треугольник

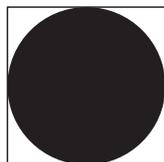


Рис. 12. Круг, вписанный в квадрат

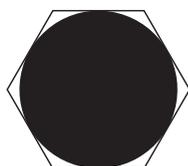


Рис. 13. Круг, вписанный в правильный шестиугольник

угольниками. Как потом лучше расположить круги на плоскости, чтобы укладка кругов оказалась оптимальной и имела наибольшую плотность?

Задача 7.

Можно ли в прямоугольник 8×6 поместить 50 кругов диаметром 1? Круги могут касаться друг друга и сторон прямоугольника, но не имеют общих внутренних точек.

Вначале кажется, что в такой прямоугольник можно поместить только $8 \times 6 = 48$ кругов, но внимательно изучите укладку кругов на рисунке 14. Обоснуйте, что возможна такая плотная упаковка и напишите программу построения рисунка 14.

7. Заключение

Использование компьютерного моделирования позволяет точно построить заполнение области D (в нашем случае диска сушилки или прямоугольного противня) системой некоторых объектов P (в нашем случае равными и/или подобными долями груши в виде пластин груши или круговых дисков). Предложенный набор заданий (от более простых с постепенным усложнением к более сложным) направлен на постепенное самообучение, разработку простейших математических моделей, создание компьютерных программ и постепенное вовлечение

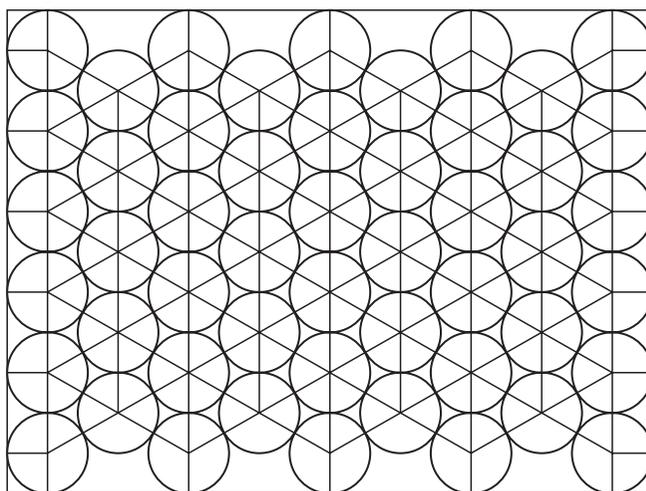


Рис. 14. Расположение 50 кругов в прямоугольнике

учащихся в тематику по плотной упаковке предметов [3]. Задачи 6 и 7 для самостоятельного решения показывают, что плотная упаковка предметов имеет важное значение. Модель груши, изученная в данной статье, по мнению авторов, рассмотрена впервые и вносит определенный вклад в тематику плотной упаковки предметов.

Список источников

1. Бешенков С. А., Ракитина Е. А. Моделирование и формализация. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002. 336 с.
2. Босова Л. Л. Программирование как инструмент формирования вычислительного мышления обучающихся // Информатика в школе. 2020. № 10. С. 4–10. EDN: GURIPH. DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-10-4-10
3. Брасс П., Мозер У., Пах Я. Открытые проблемы дискретной геометрии: пер. с англ. М.: МЦНМО, 2021. 448 с.
4. Долингер Л. И. Основы программирования в среде PascalABC.net: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 128 с.
5. Керзон П., Макоуэн П. Вычислительное мышление. Новый способ решать сложные задачи: пер. с англ. М.: Альпина Паблишер, 2018. 265 с.
6. Осипов А. В. PascalABC.net: Введение в современное программирование. Ростов-на-Д., 2019. 572 с. <https://pascalabc.net/downloads/OsipovBook/КнигаДляСайта.pdf>
7. Семакин И. Г., Хеннер Е. К. Информационные системы и модели: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 303 с.
8. Совертков П. И. Компьютерное моделирование: учебник. СПб.: Лань, 2023. 424 с.
9. Совертков П. И., Назин А. Г. Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике. Элективный курс: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 296 с.
10. Угринович Н. Д. Исследование информационных моделей. Элективный курс: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 183 с.