

DOI: 10.32517/2221-1993-2023-22-6-78-84

О. М. Корчажкина

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ МЕТОДАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

В статье описываются аналитико-графические способы исследования поведения системы двух алгебраических уравнений с параметром через поиск особых (граничных) точек в области допустимых значений параметра. Эти точки являются границами интервалов, причем внутри каждого интервала система уравнений имеет сходные свойства, а ее поведение подчиняется единым правилам. Таким образом устанавливается полная картина решения задачи, подтверждаемая затем визуальными методами динамической геометрии, которые воспроизводятся в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор». Предлагаемый прием особых точек может быть использован при выполнении тренировочных упражнений для подготовки к олимпиадам и профильному ЕГЭ по математике как ключ к анализу всех возможных ситуаций, возникающих в конкретной задаче с параметром.

Ключевые слова: особые точки, параметры, задачи с параметром, динамические чертежи, «1С:Математический конструктор».

1. Введение

Обзор результатов сдачи ЕГЭ по профильной математике за последние несколько лет показывает, что лишь 1 % учащихся приступает к решению задач с параметром. Причем только одной десятой части самых отважных старшеклассников из этой группы удается найти правильное решение [10, с. 10], поскольку эти задачи требуют высокого уровня математической подготовки, включающего, прежде всего, умение тщательно анализировать условие задачи, т. е. верно проводить рассуждения, проверки и вспомогательные преобразования.

Основной причиной, по которой учащиеся не рискуют приступать к выполнению задания, включающего параметры, можно считать сложную аналитическую запись условия, содержащую модули, радикалы, тригонометрические, логарифмические или экспоненциальные функции, другие степенные выражения или даже неравенства.

При этом учащиеся мысленно по прочно устоявшейся привычке начинают рассматривать возможный путь решения уравнения или системы уравнений «в лоб», т. е. пытаются найти корни, принимая параметр за некую константу. Тогда как вместо этого необходимо проводить тщательный анализ условия задачи, позволяющий увидеть, что скрывается за сложными «наворотами» в аналитической записи, и при «расшифровке» этой записи правильно использовать сам параметр.

2. Общие правила решения алгебраических задач с параметром

Задачи с параметром могут быть представлены разными способами, например:

- найдите решение задачи для любого значения параметра во всей области допустимых значений или в пределах ограниченного множества;

Контактная информация

Корчажкина Ольга Максимовна, канд. тех. наук, ст. научный сотрудник, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия; адрес: 119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2; e-mail: olgakomax@gmail.com

О. М. Korchazhkina

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ANALYZING THE BEHAVIOUR OF A SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS WITH A PARAMETER USING DYNAMIC GEOMETRY METHODS

Abstract

The article proposes analytical and graphic techniques for investigating the behaviour of a system of two algebraic equations with a parameter through the search for singular (i. e. boundary) points in the range of acceptable parameter values. The singular points are the boundaries of the ranges, and within each range, the system has similar properties, as well as its behaviour obeys the same rules. Thus, the method establishes a complete picture of the solution of the problem, which then can be confirmed by visual ways of dynamic geometry reproduced in the interactive creative environment 1C:MathKit. The algorithm of singular points proposed in the paper can be used when performing training exercises to prepare for the Olympiads and the profile USE in mathematics as a key to analyzing all possible situations that arise in a particular task with a parameter.

Keywords: special points, singular points, parameters, tasks with parameter, problems with parameter, dynamic drawings, dynamic figures, 1C:MathKit.

- определите значения параметра для заданного числа решений задачи;
- определите число решений задачи при заданных значениях параметра;
- определите значения параметра, для которых выполняются заданные условия, накладываемые на решения задачи.

Несмотря на такое многообразие вариантов, проблемы понимания (или непонимания), возникающие в процессе анализа условия задачи, одинаковы при любых формулировках задачи с параметром. Чаще всего учащиеся не видят различий между способами определения значений параметра и способами определения неизвестных величин (корней) уравнения или системы уравнений, тогда как **параметры обладают особыми функциями**, отличными от функций неизвестных величин:

- параметры создают условия задачи, т. е. в задаче они играют доминирующую роль, а неизвестные величины — второстепенную;
- параметры могут вносить дополнительные ограничения в условие задачи, влияющие на выбор способа ее решения;
- граничные значения параметра, или *особые точки*, делят область его допустимых значений на интервалы, формируя в каждом интервале из первоначального условия различные задачи, т. е. параметры создают семейство задач, различных по виду (аналитической записи), способам решения и числу корней.

Общие правила решения задач с параметром состоят в следующем:

- задачи с параметром — многовариантные задачи, требующие учета определенных ограничений (условий существования решений), которые накладываются на корни уравнения или системы уравнений конкретным значением параметра;
- решение задачи с параметром следует начинать не с определения корней, а с исследования значений параметра, отвечающих заданным условиям;
- направление поиска решения задачи задается значением параметра при заданных условиях;
- анализ условия задачи с параметром осуществляется путем рассуждений с использованием логических операторов или их синтаксических значений на естественном языке: «если ..., то/тогда ...»; «что если ...»; «и ..., и ...»; «или ..., или ...»; «без ...»; «не ...»; «кроме ...» и пр.

Эти правила лежат в основе всех оптимизационных процедур (процедур упрощения условия задачи), представляющих собой специальные методы решения задач с параметром.

К ним относятся, например, использование свойств монотонности [5, с. 84–90; 8, с. 50–56; 9, с. 109–123], симметрии [5, с. 245–257; 8, с. 85–87], инвариантности [9, с. 147–165], экстремальных значений функций [4; 5, с. 231–243; 8, с. 88–91], аффинных преобразований [5, с. 97–140], свойств квадратичной функции [5, с. 159–212; 8, с. 34–36; 9, с. 88–108], приемов динамической математики [1–3], а также многие другие способы оптимизации.

3. Прием особых точек для анализа поведения системы двух алгебраических уравнений с параметром

Если рассматривать наиболее часто встречающиеся задачи с параметром в виде системы двух алгебраических уравнений, то они обладают одним полезным свойством, использование которого на подготовительном этапе значительно облегчает поиск основного решения. Подвергая оба уравнения различным алгебраическим преобразованиям и рассматривая параметр как неизвестную величину, можно найти все особые точки, разбивающие область допустимых значений параметра на ряд интервалов, где система ведет себя однотипно. Причем переходы через эти граничные точки приводят к принципиальным изменениям в условиях задачи. Выявление особых точек в области допустимых значений параметра помогает составить полную картину поведения системы с параметром, учитывая все возможные варианты решения задачи.

Таким образом, особые точки являются теми значениями параметра, которые упрощают аналитическое решение задачи. Их можно определить, приравняв к нулю дискриминант квадратного уравнения, другое подкоренное выражение или свободный член многочлена, содержащие параметр. Кроме того, особые точки могут обнаруживаться в вырожденных случаях, когда, например, окружность стягивается в точку, а гипербола сливается с собственными асимптотами.

Прием особых точек при решении задач с параметром предполагает выбор следующей стратегии:

- в аналитической записи условия задачи выявить признаки, которые могут свидетельствовать о наличии особых точек, определить эти значения параметра и зафиксировать вызванные ими качественные изменения задачной ситуации (например, вид аналитической записи задачи и число решений);
- разделить область допустимых значений параметра на интервалы с учетом особых точек и проследить изменение условий задачи для каждого интервала;
- для проверки правильности результата найти при заданных значениях параметра соответствующие корни системы уравнений, чтобы проверить, действительно ли не нарушены условия задачи;
- для подтверждения проведенного анализа условия задачи, для понимания общей картины поведения параметра, а также для подтверждения полученного аналитического решения задачи *использовать инструменты динамической геометрии*.

4. Примеры анализа поведения системы двух алгебраических уравнений с параметром

Рассмотрим несколько примеров анализа поведения системы двух алгебраических уравнений с параметром во всей области допустимых значений параметра.

Задача 1.

Исследуйте поведение системы уравнений:

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = p^2 \end{cases} \quad (1)$$

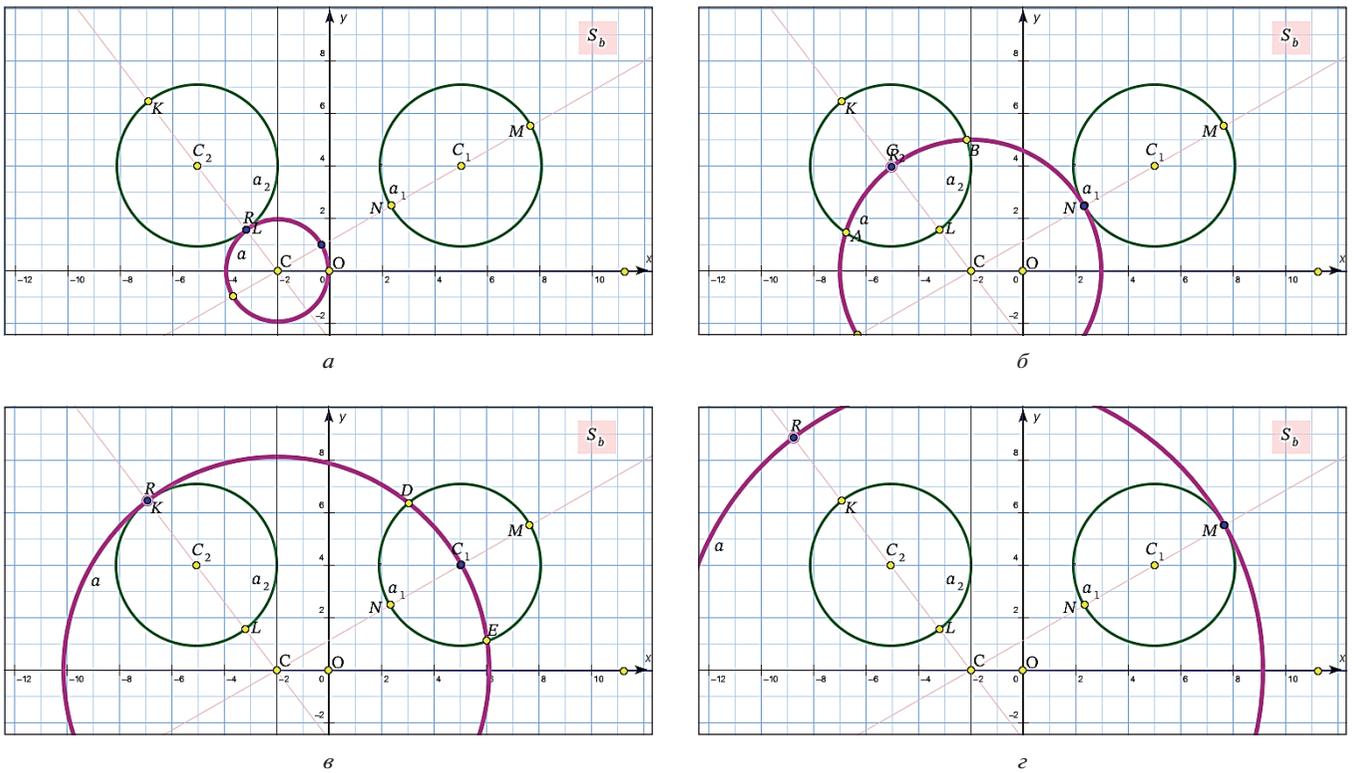


Рис. 1. Расположение особых точек (значений параметра) системы уравнений (1) на координатной плоскости: а) $p = 2$; б) $p \approx 5,1$; в) $p = 8$; г) $p \approx 11,1$

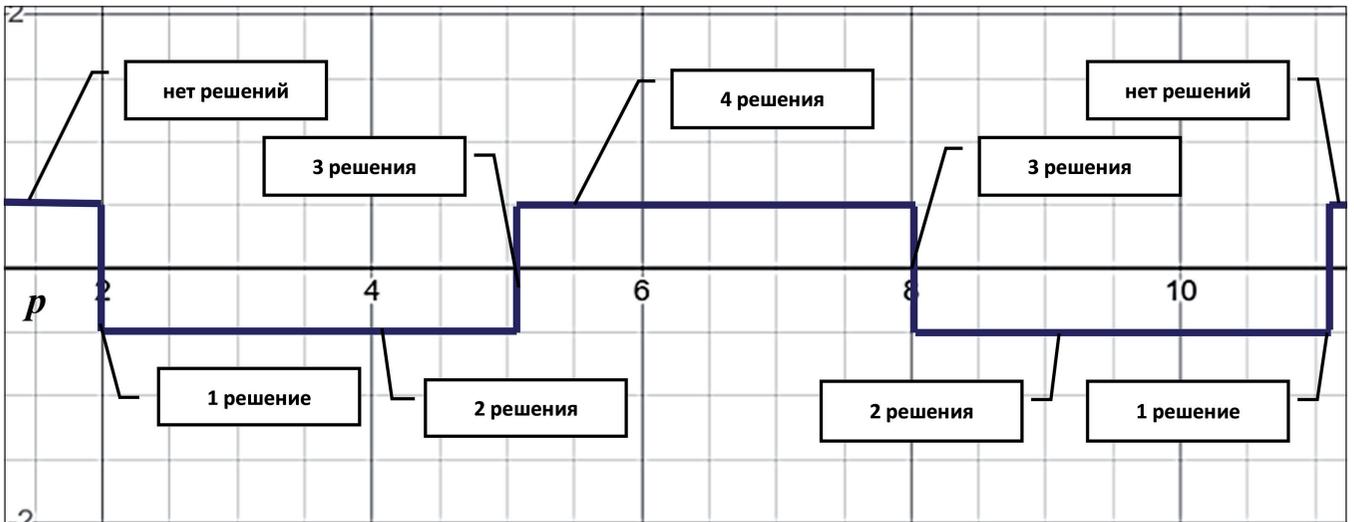


Рис. 2. Шкала изменений параметра p и число корней в каждом интервале

во всей области допустимых значений параметра p (графическое решение задачи см. в [6, с. 19–20]), а с помощью динамических чертежей — в интерактивной творческой среде «1С:Математический конструктор» [1–3]).

Решение.

Раскрывая знак модуля, получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = p^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = p^2, \end{cases}$$

в которых второе уравнение задает окружность a радиуса p с центром в точке $C(-2; 0)$, а первые уравнения — две окружности a_1 и a_2 радиуса 3 с центрами в точках $C_1(5; 4)$ и $C_2(-5; 4)$ соответственно; эти окружности расположены симметрично относительно оси ординат (рис. 1, а–г). Особыми точками системы (1) являются значения параметра p , при которых происходит изменение числа ее решений.

Эти особые точки находят через значения радиусов окружностей a и a_1 ; a и a_2 . Учитывая, что расстояние между центрами окружностей $CC_1 = \sqrt{7^2 + 4^2} \approx 8,1$ и $CC_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, получаем (см. рис. 1, а–г):

$$p_1 = CC_2 - 3 = 2;$$

$$p_2 = CC_1 - 3 \approx 5,1;$$

$$p_3 = CC_2 + 3 = 8;$$

$$p_4 = CC_1 + 3 \approx 11,1.$$

С помощью динамических чертежей* могут быть проверены аналитические выкладки и продемонстрирована полная картина поведения системы уравнений (см. рис. 1, а–з). На рисунке 2 представлена шкала изменений параметра p с указанием числа корней в каждом интервале его значений.

* Здесь и далее динамические чертежи построены с помощью интерактивной творческой среды «1С:Математический конструктор».

Задача 2.

Исследуйте поведение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2, \\ xy = p(p - 3) \end{cases} \quad (2)$$

во всей области допустимых значений параметра p .

Решение.

Очевидно, что особыми точками в области допустимых значений параметра будут $p = 0$ и $p = 3$, при которых гипербола, задаваемая вторым уравнением системы (2), вырождается в собственные асимптоты, совпадающие с осями координат. А при $p = 0$ окружность, которая описывается первым уравнением, стягивается в точку, совпадающую с началом координат.

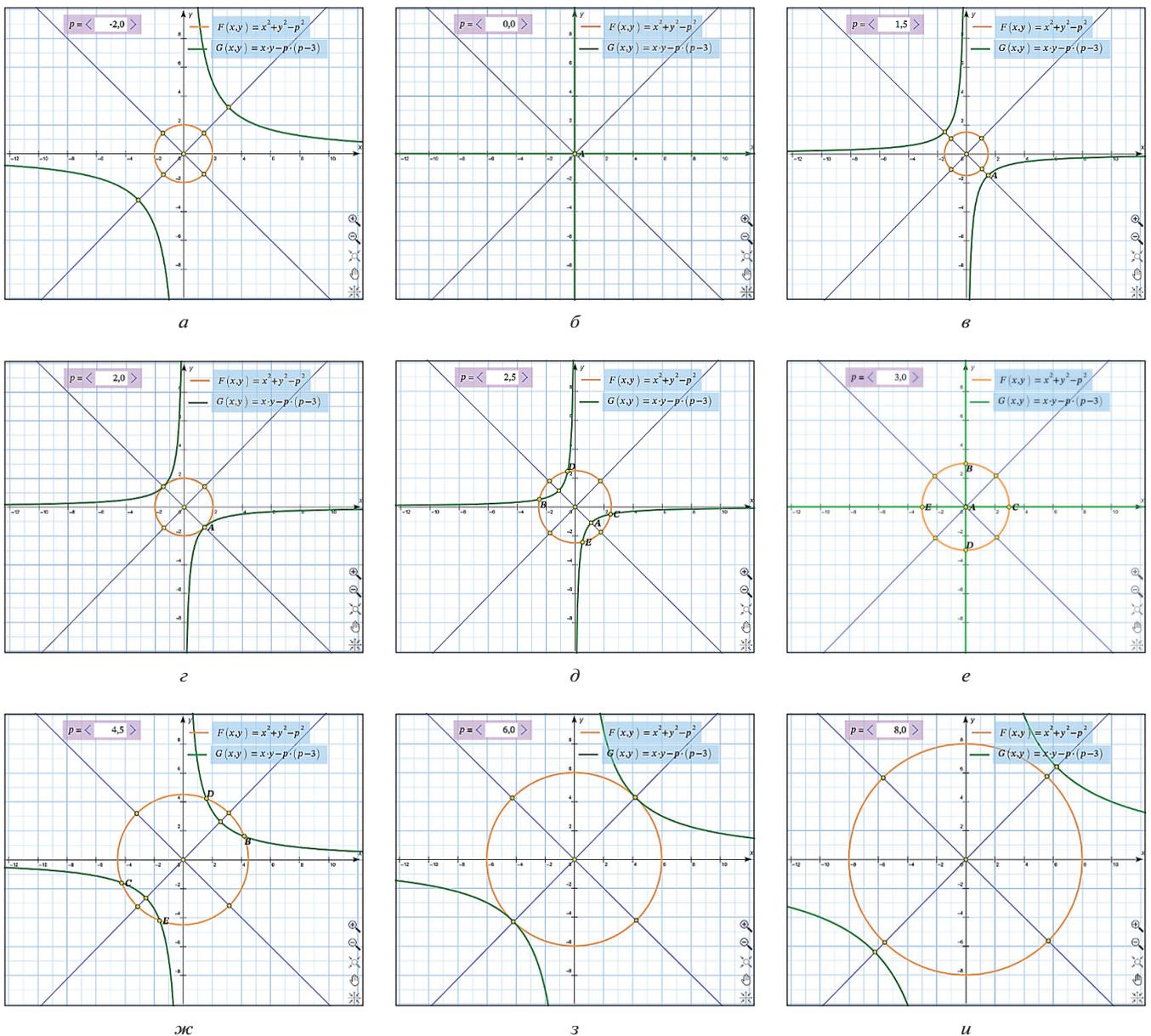


Рис. 3. Поведение системы уравнений (2) в интервалах изменения параметра: а) нет решений при $p < 0$; б) одно решение при $p = 0$; в) нет решений при $0 < p < 2$; г) два решения при $p = 2$; д) четыре решения при $2 < p < 3$; е) четыре решения при $p = 3$; ж) четыре решения при $3 < p < 6$; з) два решения при $p = 6$; и) нет решений при $p > 6$

Чтобы проверить, существуют ли дополнительные особые точки в области допустимых значений параметра, преобразуем систему (2) следующим образом: прибавим к первому уравнению удвоенное второе. При этом получим еще одну особую точку $p = 2$:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 3p(p-2), \\ xy = p(p-3). \end{cases}$$

Если же из первого уравнения вычесть удвоенное второе, то получим четвертую особую точку $p = 6$:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = p(6-p), \\ xy = p(p-3). \end{cases}$$

Таким образом, особые точки 0, 2, 3 и 6 разбили область допустимых значений параметра p на пять интервалов: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 6)$ и $(6; +\infty)$, в пределах которых система уравнений (2) имеет однотипное поведение. А сами особые точки служат границами, где происходит качественный скачок в аналитической записи системы и, следовательно, в ее решении.

Итак, несложно установить, что система (2) имеет следующие решения в особых точках:

- при $p_1 = 0$ система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$$

имеет вырожденное решение $(0; 0)$;

- при $p_2 = 2$ система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = -2 \end{cases}$$

имеет два решения: $(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2})$;

- при $p_3 = 3$ система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 0 \end{cases}$$

имеет четыре решения: $(\pm 3; 0)$ и $(0; \pm 3)$;

- при $p_4 = 6$ система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ xy = 18 \end{cases}$$

имеет два решения: $(\pm\sqrt{18}; \pm\sqrt{18})$.

Если требуется исследовать поведение системы (2) в интервалах изменения параметра между особыми точками, то это можно сделать методом динамических чертежей [1–3], получив при этом результаты, изображенные на рисунке 3.

Исследования показали, что при переходе значения параметра через 0 (когда первое уравнение вырождается в начало координат, а второе — в оси координат) ветви гиперболы меняют свое расположение на координатной плоскости, перемещаясь из I и III квадрантов во II и IV квадранты. При этом два корня (как точки касания гипербол и окружности) появляются при $p = 2$, а затем в области допустимых значений параметра от 2 до 6 система имеет четыре решения, как и при промежуточном значении $p = 3$. Однако в последнем случае центральная окружность остается, а ветви гиперболы вырождаются в оси координат.

Задача 3.

Исследуйте поведение системы уравнений [7, с. 85]:

$$\begin{cases} xy + x + y = p, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \quad (3)$$

во всей области допустимых значений параметра p .

Решение.

Первое уравнение системы (3) описывает гиперболу, а второе — окружность радиуса $2\sqrt{2}$.

Первое, очевидное, **значение особой точки $p = 0$** . Для определения других особых точек прибавим ко второму уравнению системы (3) удвоенное первое. Добавим по 1 к обеим частям полученного выражения:

$$(x+y+1)^2 = 2p+9, \text{ или } x+y+1 = \pm\sqrt{2p+9}. \quad (4)$$

Приравняв к нулю подкоренное выражение, найдем **вторую особую точку: $p = -4,5$** .

Поиск остальных особых точек не столь очевиден, однако, проделав необходимые алгебраические преобразования, можно добиться полной картины допустимых значений параметра, определяющих поведение системы.

Итак, из (4) имеем:

$$x+y = \pm\sqrt{2p+9} - 1,$$

а из первого уравнения (3):

$$xy = p - (x+y). \quad (5)$$

Рассмотрим для определенности случай:

$$x+y = \sqrt{2p+9} - 1.$$

Тогда:

$$x = \sqrt{2p+9} - 1 - y.$$

Подставляя выражения для $(x+y)$ и x в (5), получим квадратное уравнение относительно y :

$$y^2 + (1 - \sqrt{2p+9})y + (p+1 - \sqrt{2p+9}) = 0.$$

Обозначив $\sqrt{2p+9}$ через t и проведя необходимые преобразования, получим следующее уравнение:

$$t^2 - 2t - 15 = 0.$$

Его корнями являются $t_1 = 5$ и $t_2 = -3$, дающие $p = 8$ и $p = 0$ соответственно.

Таким образом, мы получили еще одну, **третью, особую точку $p = 8$** и подтвердили существование ранее найденной точки $p = 0$ дополнительным способом. Отметим, что случай $x+y = -\sqrt{2p+9} - 1$ приводит при $t_1 = -5$ и $t_2 = 3$ к аналогичному результату.

Найдем четвертую особую точку. Для этого приведем первое уравнение системы (3) для гиперболы к виду для $y = \frac{p-x}{1+x}$, где $x \neq -1$ и для $x = \frac{p-y}{1+y}$, где $y \neq -1$.

Очевидно, что при $p = -1$ ветви гиперболы вырождаются в собственные асимптоты: $x = -1$ и $y = -1$. Следовательно, **четвертая особая точка — это $p = -1$** .

Итак, подставляя в систему (3) найденные значения параметра p , можно получить следующие результаты, которые подтверждаются динамическими чертежами, представленными на рисунке 4:

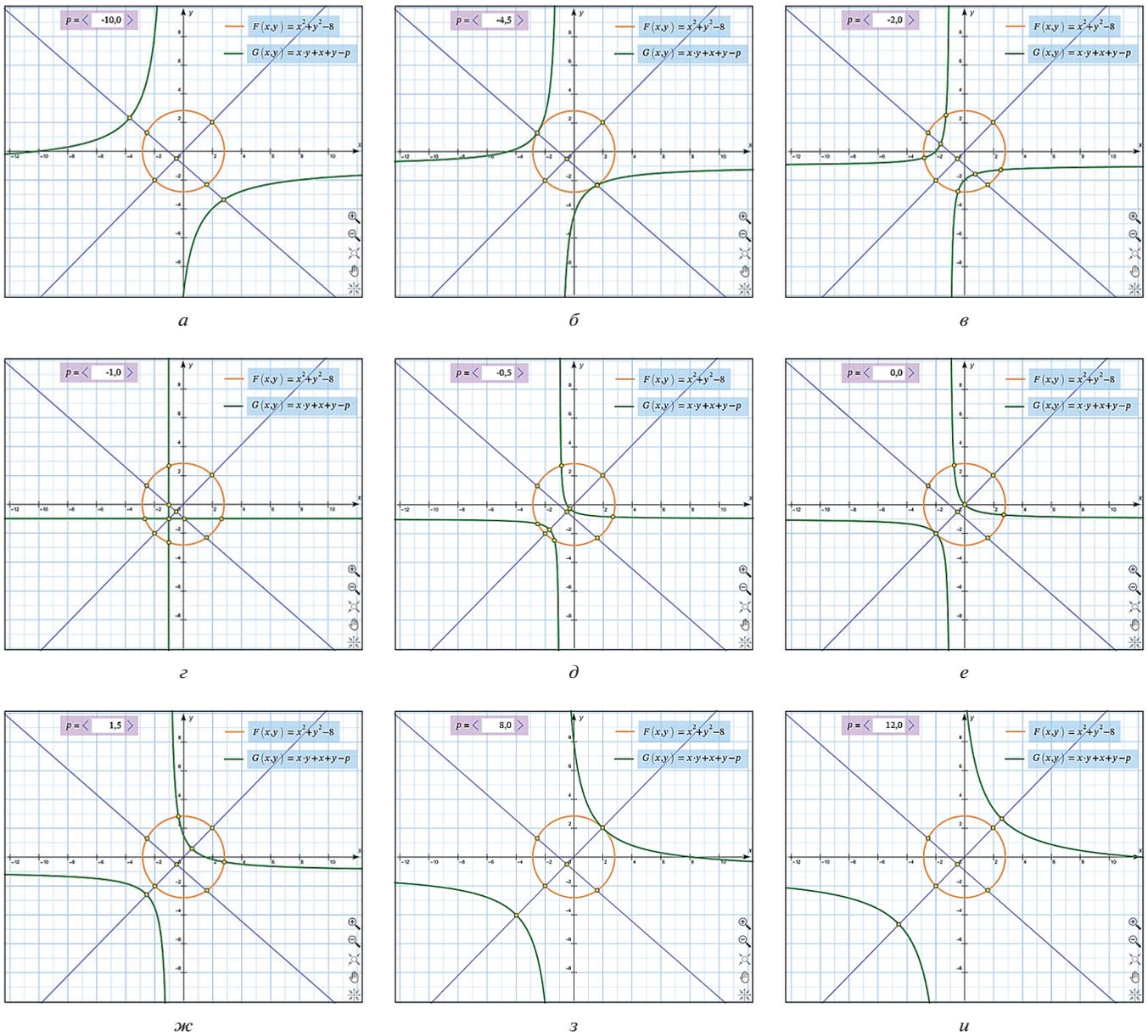


Рис. 4. Поведение системы уравнений (3) в интервалах изменения параметра:
 а) нет решений при $p < -4,5$; б) два решения при $p = -4,5$; в) четыре решения при $-4,5 < p < -1$;
 г) четыре решения при $p = -1$; д) четыре решения при $-1 < p < 0$; е) три решения при $p = 0$;
 ж) два решения при $0 < p < 8$; з) одно решение при $p = 8$; и) нет решений при $p > 8$

- при $p_1 = -4,5$ система:

$$\begin{cases} xy + x + y = -4,5, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \right) \text{ и } \left(\frac{-1 - \sqrt{15}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{15}}{2} \right);$$

- при $p_2 = -1$ система:

$$\begin{cases} xy + x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

имеет четыре решения:

$$(-1; +\sqrt{7}); (+\sqrt{7}; -1); (-\sqrt{7}; -1); (-1; -\sqrt{7});$$

- при $p_3 = 0$ система:

$$\begin{cases} xy + x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

имеет три решения:

$$(-2; -2), (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}) \text{ и } (1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3});$$

- при $p_4 = 8$ система:

$$\begin{cases} xy + x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

имеет одно решение: $(2; 2)$.

Динамическое поведение системы уравнений (3) в зависимости от значений параметра выглядит следующим образом:

- при $p < -4,5$ система (3) не имеет решений (рис. 4, а);
- при $p = -4,5$ система (3) имеет два решения, образованные точками касания окружности и ветвей гиперболы (рис. 4, б);
- при $-4,5 < p < 0$ система (3) имеет четыре решения как точки пересечения ветвей гиперболы и окружности (рис. 4, в–д);
- при переходе параметра через $p = -1$ ветви гиперболы меняют локализацию на координатной плоскости, а при $p = -1$ они вырождаются в свои асимптоты: $x = -1$ и $y = -1$ (рис. 4, з);
- при $p = 0$ система (3) имеет три решения: два — как точки пересечения правой ветви гиперболы и окружности и одно — как точка касания левой ветви гиперболы и окружности (рис. 4, е);
- при $0 < p < 8$ система (3) имеет два решения — как точки пересечения правой ветви гиперболы и окружности (рис. 4, ж);
- при $p = 8$ система (3) имеет одно решение — как точка касания правой ветви гиперболы и окружности (рис. 4, з);
- при $p > 8$ система (3) не имеет решений (рис. 4, и).

5. Заключение

Описанный в статье прием особых точек помогает учащимся выявить набор «подводных камней» задачи с параметром через исследование поведения системы во всей области допустимых значений параметра, а также понять, чем функции параметра отличаются от роли корней системы уравнений. Таким образом, через общий обзор задачной ситуации складывается полная картина влияния параметра на конечный результат.

Тем не менее следует отметить, что основная трудность при использовании приема особых точек состоит в том, что число этих точек заранее неизвестно. Однако если запись задачи включает квадратичную функцию или имеет модули, то, вероятнее всего, число корней может варьироваться от одного до четырех, что предполагает наличие четырех особых точек, разбивающих область допустимых значений параметра на пять интервалов. В пределах внутренних интервалов задача, как правило, имеет решение, а в пределах правого и левого интервалов — при значениях параметра, уходящих в $\pm\infty$, — решения не существует.

Трудности, с которыми встречается большинство учащихся, полностью снимаются, если при решении подобных нетривиальных алгебраических задач использовать подвижные чертежи, выполняемые с помощью инструментов динамической геометрии «1С:Математический конструктор». Эти инструменты могут работать как автономно — непосредственно для решения задач с параметром в режиме «сериала», демонстрирующего переходные процессы во всей области допустимых значений параметра, так и как вспомогательный способ оценки общей картины задачной ситуации и проверки правильности решения, найденного алгебраическим путем.

Список источников

- 1С:Математический конструктор 10.0. Интерактивная творческая среда для создания математических моделей. URL: <https://obr.1c.ru/mathkit/>
- 1С:Урок — Библиотека интерактивных материалов. Виртуальные лаборатории по математике, 7–11 кл. // 1С:Урок. https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/
- 1С:Урок — Главная страница // 1С:Урок. <https://urok.1c.ru/share/model/9dd2671fdc61e07c580e3b87194bdb6f/>
- Бичегкуев М. С., Олисаев Э. Г. Наименьшее и наибольшее значение функций в задачах с параметром // Математика в школе. 2022. № 8. С. 8–15. EDN: MTFKBE. DOI: 10.47639/0130-9358_2022_8_8
- Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. 3-е изд., допол. и перераб. М.: ИЛЕКСА, 2007. 328 с.
- Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2023 года по математике. Профильный уровень. М.: ФИПИ, 2022. 23 с. <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!tab/151883967-2>
- Ларин С. В. Использование компьютерной анимации при обучении решению задач с параметрами // Математика в школе. 2022. № 7. С. 43–48. EDN: ORLAOG. DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_43
- Шевкин А. В. Математика. Трудные задания ЕГЭ. Задачи с параметром: профильный уровень: учебное пособие. 2-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022. 96 с.
- Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И. В. Яценко. М.: МЦНМО, 2022. 288 с.
- Яценко И. В., Высоцкий И. Р., Семенов А. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике // Педагогические измерения. 2021. № 4. С. 3–28. EDN: XMTHLT. <https://doc.fipi.ru/zhurnal-fipi/PI-2021-04.pdf>