



Д. М. Златопольский

Школа № 1530 «Школа Ломоносова», г. Москва, Россия

ИЗ ИСТОРИИ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ. ФРАНЧЕСКО БРУНЕТТИ

Аннотация

В статье описывается книга итальянского математика Франческо Брунетти «Arimmetica binomica...», изданная в 1746 году. Приводятся примеры чисел из книги, примеры сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня в двоичной системе счисления, а также двоичные значения логарифмов ряда чисел. В книге представлены также действия над дробями и смешанными двоичными числами. Обращается внимание на предложенный Брунетти оригинальный способ записи двоичных чисел. Согласно этому способу вместо всего двоичного числа записываются только номера (в виде десятичных цифр) тех разрядов, в которых представлены единицы (при нумерации начиная справа). Порядковые номера цифр, большие 9, Брунетти предлагает обозначить как их последнюю цифру (0, 1, ..., 9), записывая справа от всех таких цифр запятую (штрих), а номера, большие 19, — аналогично с двумя запятыми и т. д. При такой записи значительно облегчаются четыре арифметических действия над двоичными числами (в статье приводится пример сложения соответствующим образом записанных чисел).

Ключевые слова: история информатики, двоичная система счисления, способ записи двоичных чисел, Франческо Брунетти.

В данной статье мы продолжаем (см. [4, 5]) представлять малоизвестные работы, связанные с историей двоичной системы счисления.

1. Книга середины XVIII века

В 1746 году Франческо Саверио Брунетти (Francesco Saverio Brunetti, 1693 — вторая половина XVIII века), итальянский математик, капеллан папы римского Бенедикта XIV [10], опубликовал книгу «Arimmetica binomica. E diadica, in cui tutte le operazioni si fanno colle sole figure uno e zero» («Арифметика биномиальная (или двоичная), в которой все операции производятся только с цифрами один и ноль») [12] (рис. 1).

2. Особенности двоичной системы счисления

В книге после общей характеристики двоичной системы счисления (используемые цифры и др.) Брунетти приводит двоичную запись десятичных чисел от 1 до 34

(после последнего автор пишет «и т. д.») (рис. 2) и степени числа 2 (до 20-й)* (рис. 3).

Затем ученый описывает методику перевода целых положительных десятичных чисел в двоичную систему счисления методом, аналогичным современному методу выделения наибольшей степени числа 2 [1]. Делает это автор на примере чисел 18 ($18_{10} = 16 + 2 = 2^4 + 2^1 = 10010_2$) и 600 ($600_{10} = 512 + 64 + 16 + 8 = 2^9 + 2^6 + 2^4 + 2^3 = 1001011000_2$). Интересно, что Брунетти не приводит методику обратного перевода, хотя запись большого количества двоичных чисел сопровождается записью рядом соответствующих десятичных значений.

3. Операции над двоичными числами

Конечно, в книге приводятся примеры арифметических операций. Примеры сложения и вычитания показаны на рисунке 4.

* Затем, в конце основной части книги, приводятся значения и больших степеней (до 40-й). К сожалению, после числа 234 (17 179 869 184) значения ошибочны [16].

Контактная информация

Златопольский Дмитрий Михайлович, канд. тех. наук, доцент, руководитель музея истории вычислительной техники, школа № 1530 «Школа Ломоносова», г. Москва, Россия; адрес: 107014, Россия, г. Москва, ул. Егерская, д. 4; e-mail: zlatonew@gmail.com

D. M. Zlatopolski

School 1530 "Lomonosov School", Moscow, Russia

FROM THE HISTORY OF THE BINARY NUMBER SYSTEM. FRANCESCO BRUNETTI

Abstract

The article describes the book of the Italian mathematician Francesco Brunetti "Arimmetica binomica...", published in 1746. Examples of numbers from the book, examples of addition, subtraction, multiplication, division and extraction of the square root in the binary system, as well as binary values of the logarithms of a number of numbers are given. The book also presents operations on fractions and mixed binary numbers. Attention is drawn to the original way of writing binary numbers proposed by Brunetti. According to this method, instead of the entire binary number, only the numbers (in the form of decimal digits) of those digits in which units are represented (with numbering starting from the right) are recorded. Ordinal numbers of digits greater than 9, Brunetti proposes to designate as their last digit (0, 1, ..., 9), writing a comma (prime) to the right of all such digits, and numbers greater than 19 — similarly with two commas, etc. With such a notation, four arithmetic operations on binary numbers are greatly facilitated (the article provides an example of adding the numbers written accordingly).

Keywords: informatics history, binary number system, way of writing binary numbers, Francesco Brunetti.

ARIMMETICA
BINOMICA, E DIADICA,
 In cui tutte le operazioni si fanno colle sole
 figure *Uno, e Zero*
 DEDICATA
All' Illustrissimo, e Reverendissimo Signore
MONSIGNORE
GIAN FRANCESCO
ALBANI
 DA
D. SAVERIO BRUNETTI
 DA CORINALDO
 Cappellano della Santità di N. S. Papa
BENEDETTO XIV.



IN ROMA,
 Nella Stamperia del Bernabò, e Lazzarini, MDCCLVI.
 CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Рис. 1. Титульный лист книги [12] (источник — [15])

111	7
1010	10
11001	25
101010	42
11110	30
1100	12

Рис. 4. Примеры сложения и вычитания двоичных чисел в [12]

Интересно, что Брунетти приводит и пример сложения со значениями, выраженными в нескольких единицах (фунты и унции и др.).

В примере умножения (рис. 5) обратим внимание на четыре числа в левой части.

101 0	10011	19
0 0	11100	28
	10011	152
	10011	38
	10011	532
	10000101	15

Рис. 5. Пример умножения двоичных чисел в [12]

Эти числа связаны с проверкой полученного результата. Это первый и единственный в истории математики пример такой проверки применительно к десятичной системе счисления. Правда, Брунетти не комментирует этот момент. Анализ показывает, что, как и применительно к десятичной системе, проверка основана на свойствах остатков (см., например, [9]). Причем автор использовал остатки от деления на 7. Скорее всего, это связано с тем, что в другой своей книге, описывающей десятичную систему счисления [13], он проводит проверку правильности результатов умножения и деления с расчетом остатков от деления на 7 и на 9. Еще одно отличие заключается в том, что результаты расчетов при проверке Брунетти записывает в четырех, так сказать, «квадрантах», в то время как в русских старинных математических источниках (например, в [8]) результаты вычислений располагались в вершинах «креста» (рис. 6).

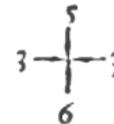


Рис. 6. Пример проверки результата умножения в [8]

Интересно проводится деление (в книге Брунетти — на примере деления двоичных чисел 1746 на 19) (рис. 7).

Справа от делимого, где в настоящее время мы записываем делитель, Брунетти записывает частное (по одной цифре). Видно, что результат деления не является целым — при целой части частного, равной 1011011 (91₁₀), имеется остаток 10001 (17₁₀), также записанный в виде десятичного числа. В других примерах деления результат записывается в виде смешанной двоичной дроби (например, в виде 10 $\frac{10111}{11100}$). На рисунке 7 также представлены результаты проверки правильности расчетов, которые автор комментирует в тексте.

1	1	18	10010
2	10	19	10011
3	11	20	10100
4	100	21	10101
5	101	22	10110
6	110	23	10111
7	111	24	11000
8	1000	25	11001
9	1001	26	11010
10	1010	27	11011
11	1011	28	11100
12	1100	29	11101
13	1101	30	11110
14	1110	31	11111
15	1111	32	100000
16	10000	33	100001
17	10001	34	100010

Рис. 2. Десятичные числа от 1 до 34 и их двоичная запись в [12]

1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7
128	8
256	9
512	10
1024	11
2048	12
4096	13
8192	14
16384	15
32768	16
65536	17
131072	18
262144	19
524288	20
1048576	21
есс.	

Рис. 3. Степени числа 2 в [12]

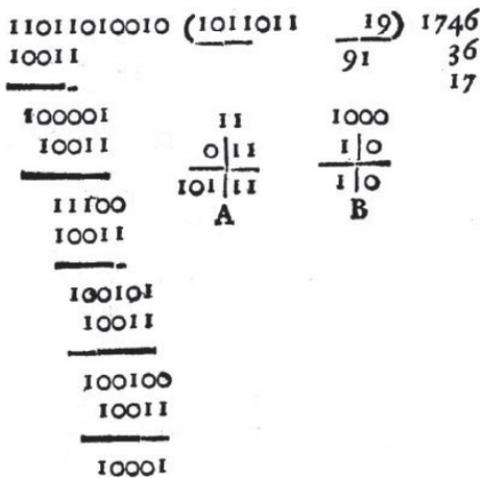


Рис. 7. Пример деления двоичных чисел в [12]

И, конечно, нельзя не обратить внимание на то, что в книге, изданной, как уже отмечалось, в 1746 году, Брунетти описывает методики извлечения квадратного и кубического корней из целых двоичных чисел! Эти методики аналогичны соответствующим методам применительно к десятичным числам, которые называются «извлечение квадратного корня столбиком» [6] и «извлечение кубического корня столбиком» [7].

Приведем примеры извлечения квадратного (рис. 8) и кубического корней (рис. 9) из книги Брунетти*.

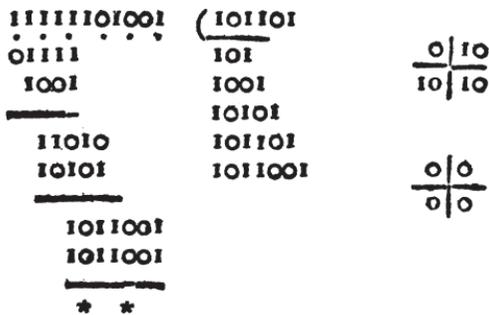


Рис. 8. Пример извлечения квадратного корня из двоичного числа в [12]

Видно, что и в них проводится проверка правильности результата.

4. Двоичные логарифмы и дробные числа

Отдельный раздел книги посвящен логарифмам. В этом разделе Брунетти приводит ряд двоичных значений — степеней двойки и соответствующие показатели степени (рис. 10) и таблицу логарифмов по основанию 2, указав в ней логарифмы с нулевой мантиссой (рис. 11).

Видно, что значения чисел и логарифмов — двоичные.

Брунетти также исследует вопрос определения логарифмов других чисел. Так, он пишет, что при известном значении логарифма числа 11 (3_{10}) логарифм числа 110

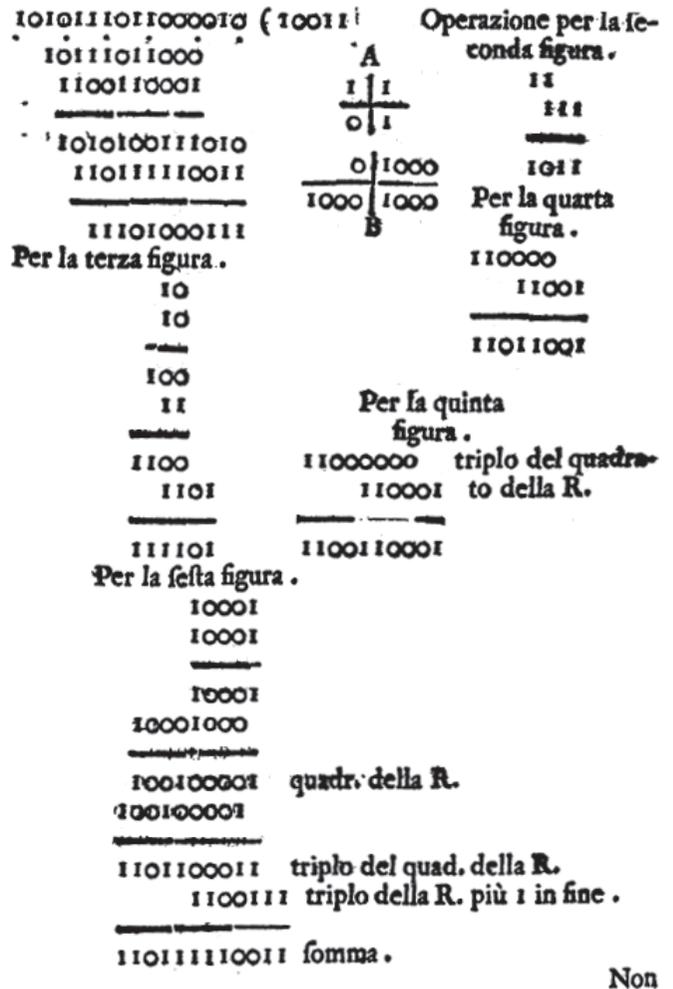


Рис. 9. Пример извлечения кубического корня из двоичного числа в [12]

1	0
10	1
100	10
1000	11
10000	100
100000	101
1000000	110
10000000	111
100000000	1000

Рис. 10. Некоторые двоичные значения — степени двойки и соответствующие показатели степени в [12]

1	0.00000000000000000000
10	1.00000000000000000000
11	
100	10.00000000000000000000
101	
110	
111	
1000	11.00000000000000000000

Рис. 11. Некоторые значения логарифмов двоичных чисел по основанию 2 в [12]

(6_{10}) можно получить, сложив известное значение с логарифмом числа 10 (2_{10}). Удвоение логарифма числа 11 даст логарифм числа 1001 (9_{10}), а утроение — числа 11011 (27_{10}).

* Подробное описание соответствующих методик приведено в [3].

Для получения логарифма числа 1100 нужно логарифм 11 сложить с числом 100. Правда, при этом значение логарифма двоичного числа 11 автор не приводит.

В своей книге Брунетти описывает методику проведения действий над дробями и смешанными двоичными числами (записывая их в виде $10 \frac{1011}{1111}$ и т. п.), в том числе извлечение квадратного корня, рассматривает периодические двоичные дроби и другие вопросы, связанные с двоичной системой.

5. Необычный способ записи двоичных чисел

Обратим внимание на то, как ученый предлагает устранить такой недостаток записи двоичных чисел и вычислений с ними, как их большую «длину». Брунетти пишет: «Я думал о каком-нибудь способе сокращения количества цифр при записи больших <двоичных> чисел и пришел к выводу, что нижеследующее является наиболее подходящим способом» [12, с. 33].

Это «нижеследующее» заключается в том, что он предлагает записывать только номера (в виде десятичных цифр) разрядов, в которых представлены единицы (при нумерации, начиная справа). Согласно этой системе, двоичное число 101001 (41_{10}) выглядит так: 641, а число 1011010 (90_{10}) — так: 7542. Видно, что цифры записываются в порядке убывания. В конце такой записи автор, как правило, ставит точку. Так, запись 1,,50,862. соответствует двоичному числу 100000100001010100010 (в [10] приведено другое, ошибочное, значение — 100000000100001010100010).

Такая система записи двоичных чисел позволяет легко сравнивать их — достаточно сравнить только первые цифры каждого числа: $7 > 64321$, $532 < 71$ и т. п.

6. Сложение «чисел Брунетти»

Предложенный способ записи двоичных чисел позволяет по-особому проводить действия с последними. На рисунке 12 дан пример сложения трех двоичных чисел, приведенный в [12]:

$$\begin{array}{r} 83 \\ 053 \\ 843 \\ \hline 0963 \end{array}$$

Рис. 12. Пример сложения двоичных чисел, записанных по особой методике в [12]

Непонятно? Давайте разбираться.

Согласно предложенному Брунетти способу записи двоичных чисел, речь в примере идет о сложении трех значений:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Как проводит расчеты автор? Он оперирует не двоичными цифрами, а десятичными значениями порядковых номеров единиц в записи двоичных чисел.

Рассмотрим сложение двух одинаковых однозначных значений. Вот таблица сложения (ее справедливость достаточно очевидна):

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 2 = 3 \\ 3 + 3 = 4 \\ \dots \\ 8 + 8 = 9 \\ 9 + 9 = 0 \end{array}$$

При сложении многозначных записей их можно выписать в одну строку. В рассматриваемом случае это будет 83053843.

Начинаем рассматривать минимальные цифры (номера). Вместо двух троек можем записать 4:

$$83053843 \rightarrow 8305844.$$

Вместо двух четверок — 5:

$$8305844 \rightarrow 830585.$$

Далее аналогично:

$$830585 \rightarrow 83068 \rightarrow 9360^*.$$

Записав четыре оставшихся цифры в порядке уменьшения, получим результат: 0963.

Можно было также сразу записать все исходные цифры в порядке убывания — 08854333 («забыв» о складываемых числах) и провести аналогичные действия:

$$08854333 \rightarrow 0885443 \rightarrow 088553 \rightarrow 0963.$$

Итак, двоичный результат сложения равен 1100100100.

А вот как выглядят расчеты с соответствующими двоичными числами:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Можно сделать вывод, что когда складываемые двоичные числа уже представлены по системе записи Брунетти, то предложенный метод сложения будет эффективнее, чем предварительная запись двоичных слагаемых и их суммирование. Особенно этот метод эффективен при большом числе слагаемых или/и при сложении многозначных чисел**. Вывод о том, является ли эффективным предложенный в XVIII веке способ сложения *имеющихся* двоичных значений, предлагаем сделать читателям.

7. Выводы

Подводя итог, можно сказать, что Брунетти описал двоичную систему гораздо подробнее своих предшественников — Хуана Карамюэля [5], Томаса Харриота [4] и Готфрида Лейбница [17] (по сути двоичными были шифр Бэкона [11] и код Морзе [10]). Автор книги [16] называет Брунетти «первым, опубликовавшим серьезную работу по двоичным дробям». К этому можно добавить приоритет Брунетти в части извлечения квадратного и кубического корней в двоичной системе счисления

* Из рисунка 9 видно, что запятой (штриха) рядом с цифрой 0 нет.

** Аналогичный по сути подход использован в [12] и для вычитания, умножения и деления записанных по-особому значений двоичных чисел (см. [2]).

и в части проведения проверки правильности расчетов в ней. Но и для него эта система была абстрактным объектом исследования, не имеющим практического значения, например, для проведения вычислений. И только в конце XIX века французский математик Эдуард Люка первым оценил ее возможности, написав в своей книге «Занимательная математика»: «Эта система <двоичная> лучше всякой другой годилась бы для устройства арифметической машины» [14, с. 148].

Список источников

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 328 с.
2. Златопольский Д. М. Двоичная арифметика Франческо Брунетти // Квант. 2021. № 11-12. С. 27–29.
3. Златопольский Д. М. Методика извлечения квадратного и кубического корней в двоичной системе счисления // Информатика в школе. 2021. № 1. С. 42–45. EDN: DOZMZC. DOI: 10.32517/2221-1993-2021-20-1-42-45
4. Златопольский Д. М., Шилов В. В. Из истории двоичной системы счисления. Томас Харриот // Информатика в школе. 2020. № 6. С. 19–23. EDN: LGJSCO. DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-6-19-23
5. Златопольский Д. М., Шилов В. В. Из истории двоичной системы счисления. Хуан Карамюэль // Информатика в школе. 2020. № 8. С. 61–63. EDN: LGJSCO. DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-8-61-63.

* Перевод наш — Д. З.

6. Квадратный корень столбиком // Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Квадратный_корень#Столбиком
7. Кубический корень столбиком // Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический_корень#Столбиком
8. Магницкий Л. Ф. Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная, и во едино собрана, и на две книги разделена. СПб., 1703. 673 с.
9. Метод проверки правильности умножения двух чисел. <https://infourok.ru/metod-proverki-pravilnosti-umnozheniya-dvuh-chisel-2030623.html>
10. Морзе Сэмюэл // Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Морзе_Сэмюэл
11. Шифр Бэкона // Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Шифр_Бэкона
12. Arimmetica binomica. E diadica, in cui tutte le operazioni si fanno colle sole figure uno e zero. <https://archive.org/details/arimeticabinomi00brungoog>
13. Dell'aritmetica comune e speciosa, Roma, Rocco Bernabò, 1731. https://books.google.ru/books?id=9OVJAAAAMAAJ&prints=ec=frontcover&hl=ru&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
14. Édouard Lucas. Récréations mathématiques. Paris. 1882. <https://archive.org/details/rcrationsmathma00lucagoog/page/n178/mode/1up?ref=ol&view=theater>
15. Francesco Saverio Brunetti // Wikipedia. https://it.wikipedia.org/wiki/Francesco_Saverio_Brunetti
16. Glaser A. History of binary and other nondecimal numeration. Tomash Publishers, 1981. 230 p. <https://www.eipiphiny.org/books/history-of-binary.pdf>
17. Leibnitz G.-G.. Explication de l'Arithmétique Binaire... // Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences, Académie royale des sciences, 1703. P. 85–89.