

DOI: 10.32517/2221-1993-2022-21-5-76-83

Н. И. Заводчикова

*Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского;
средняя школа № 76, г. Ярославль, Россия*

И. А. Быкова

*Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского;
средняя школа № 26, г. Ярославль, Россия*

ПОЭТАПНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ НАВЫКА ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ПЕРЕВОДА ЧИСЕЛ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЯМИ P И Q , ГДЕ Q ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ P

Аннотация

Формирование навыка применения алгоритма перевода чисел между системами счисления, где основание одной системы счисления есть степень основания другой, предполагает использование набора заданий для перевода умственного действия из осознанного, развернутого, внешнего состояния в неосознаваемое, свернутое, мысленное. При разработке такого набора заданий необходимо опираться на основные положения теории поэтапного формирования умственных действий. На первом этапе

Контактная информация

Заводчикова Надежда Ивановна,

канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры теории и методики обучения информатике, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия; *адрес:* 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1; учитель информатики, средняя школа № 76, г. Ярославль, Россия; *адрес:* 150031, Россия, г. Ярославль, ул. Автозаводская, д. 69д; *e-mail:* zaw-nadejda@yandex.ru

Быкова Ирина Альбертовна,

старший преподаватель кафедры теории и методики обучения информатике, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия; *адрес:* 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1; учитель информатики, средняя школа № 26, г. Ярославль, Россия; *адрес:* 150045, Россия, г. Ярославль, ул. Труфанова, д. 16; *e-mail:* i.bukova@yandex.ru

N. I. Zavodchikova

Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky, Yaroslavl, Russia;
School 76, Yaroslavl, Russia

I. A. Bikova

Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky, Yaroslavl, Russia;
School 26, Yaroslavl, Russia

STEP-BY-STEP FORMATION OF STUDENTS' SKILL IN APPLYING THE ALGORITHM FOR CONVERTING NUMBERS BETWEEN NUMBER SYSTEMS WITH BASES P AND Q , WHERE Q IS THE DEGREE OF P

Abstract

The formation of the skill of applying the algorithm for converting numbers between number systems, where the base of one number system is the degree of the base of another, assumes to use a set of tasks to convert mental action from a conscious, open, external state into an unconscious, surrogated, mental one. When developing such a set of tasks, it is necessary to rely on the basic provisions of the theory of phased formation of mental actions. At the first stage of learning the algorithm, it is reasonable to offer students a set of tasks and questions that will allow them to independently single out the orienting basis of an action in short form. Work with an open form of recording a number will correspond to the stage of materialized action, while a materialized form of mental action can be combined with speech; the result of students' work at this stage will be the formulation of the algorithm. At the stage of forming an action in external speech, you can offer students tasks to work with the wording of the algorithm; to do this, you can use tasks "with omissions" and errors in the description of the algorithm. The translation of the action into external speech "silently" will be facilitated by tasks for finding out an error in solving a problem, for applying one step of the algorithm. To automate the described mental action, it is necessary that students should perform a sufficient number of standard exercises to convert numbers between number systems, including tasks where the use of the studied algorithm is impossible. For further development of the skill of applying the algorithm, it is necessary to use tasks that may require recreating the original, open form of action. The authors' experience shows that six lessons are enough to form the skills of using this algorithm, three of the lessons are devoted to students' independent work.

Keywords: number systems, theory of step-by-step formation of mental actions, orienting basis of action, set of tasks.

усвоения алгоритма учащимся целесообразно предложить набор заданий и вопросов, которые позволят им самостоятельно выделить ориентировочную основу действия в обобщенном виде. Работа с развернутой формой записи числа будет соответствовать этапу материализованного действия, при этом материализованная форма умственного действия может сочетаться с речевой; результатом работы на этом этапе станет формулировка алгоритма. На этапе формирования действия во внешней речи можно предложить школьникам задачи на работу с формулировкой алгоритма; для этого можно использовать задачи «с пропусками» и ошибками в описании алгоритма. Переводу действия во внешнюю речь про себя будут способствовать задания на поиск ошибки в решении задачи, на применение одного шага алгоритма. Для автоматизации описываемого умственного действия необходимо выполнение школьниками достаточного количества стандартных упражнений на перевод чисел между системами счисления, включая задания, в которых использование изучаемого алгоритма невозможно. Для дальнейшего развития навыка применения алгоритма необходимо использовать задачи, которые могут потребовать воссоздания исходной, развернутой формы действия. Опыт авторов показывает, что для формирования навыков применения указанного алгоритма достаточно шести уроков, три из которых посвящены самостоятельной работе школьников.

Ключевые слова: системы счисления, теория поэтапного формирования умственных действий, ориентировочная основа действия, набор задач.

1. Введение

Последние десятилетия прослеживается тенденция на фундаментализацию курса информатики, происходит усиление линии теоретических основ информатики. Одной из наиболее сложных традиционно считается тема «Системы счисления». Изучение алгоритма перевода чисел между системами счисления с основаниями p и q , где $q = p^m$, дает школьникам простой и изящный инструмент для решения целого спектра задач, позволяет продемонстрировать интеллектуальную красоту математических основ информатики. В работах [7, 8] имеется большое количество задач для отработки навыка применения алгоритма перевода чисел между системами счисления, в которых основание одной системы счисления есть степень основания другой. Однако наблюдается дефицит задач, которые бы позволили сформировать этот навык. Формирование любого «вычислительного» навыка предполагает организацию деятельности обучающихся по переходу действия из осознаваемого, развернутого, внешнего состояния в неосознаваемое, свернутое, мысленное. Как отмечено в исследованиях П. Я. Гальперина и Н. Ф. Талызиной, формирование действий сразу в свернутом виде не является эффективным [3, 4, 9, 10], успешное становление всех характеристик умственного действия невозможно без соблюдения следующих этапов:

- этап составления схемы ориентировочной основы действия;
- этап формирования действия в материальном (материализованном) виде;
- этап формирования внешнеречевого действия;
- этап формирования действия во внешней речи про себя;
- этап формирования действия во внутренней речи.

Рассмотрим, какие задачи по указанной теме можно использовать на каждом из этапов.

2. Этап составления схемы ориентировочной основы действия

Ориентировочная основа действия — это образ действия и образ среды действия, объединенные в единый структурный элемент, на основе которого происходит управление действием [10]. Эффективность ориентировочной основы зависит от степени обобщения входящих в нее знаний (ориентиров), от полноты отражения в них

условий, определяющих успешность действия, от того, каким способом обучаемый получает ориентировочную основу.

При изучении указанного алгоритма ориентировочная основа может быть создана в частном виде, если рассматривать только двоичную и восьмеричную, двоичную и шестнадцатеричную системы счисления, но может быть представлена и в обобщенном виде, отражающем сущность алгоритма перевода между любыми системами счисления с основаниями p и q , где $q = p^m$.

Ориентировочная основа действия может быть дана обучаемому в готовом виде либо составлена им самостоятельно. Самостоятельное составление ориентировочной основы действия может происходить методом проб и ошибок или с помощью сознательного применения общего приема (метода), который получен учеником от преподавателя. Согласно Н. Ф. Талызиной, действию, сформированному на ориентировочной основе, в которой ориентиры представлены в общем виде, а основа действия составляется обучающимся самостоятельно, с помощью общего метода, который ему дается, присущи не только быстрота и безошибочность процесса формирования, но и большая устойчивость, широта переноса [10]. Л. С. Выготский говорил о необходимости предоставления школьнику таких задач, которые он не может решить самостоятельно, но успешно решает под руководством взрослых [2]. В нашей работе [6] мы уже отмечали, что использование серии взаимосвязанных упражнений позволит организовать работу учащихся по самостоятельному открытию теоретических фактов и алгоритмов.

Ниже представлен набор заданий и вопросов, который позволит обучающимся самостоятельно выделить схему ориентировочной основы обобщенного действия при изучении указанного алгоритма. Изложение опирается на понятие «развернутая форма записи числа», для формирования которого можно использовать задачи, описанные в нашей статье [5].

Задание 1.

Переведите число 1100110111_2 в восьмеричную систему счисления.

Указания к решению.

- 1) Запишите число 1100110111_2 в развернутой форме.
- 2) Сгруппируйте слагаемые по три с младших разрядов числа, вынесите из каждой скобки общий множитель.

- 3) Вынесенный множитель преобразуйте в степень 8.
- 4) Выполните действия в скобках.
- 5) Вы получите развернутую форму записи числа в восьмеричной системе счисления. Запишите его в свернутой форме.

Решение.

$$\begin{aligned} 11\ 001\ 101\ 111_2 &= 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + \\ &+ 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9) + \\ &+ (0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6) + (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3) + \\ &+ (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = (1 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^9 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^6 + \\ &+ (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^3 + (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\ &= (1 \cdot 2^1 + 1) \cdot 8^3 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 8^2 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot 8^1 + \\ &+ (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^0 = 3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 3157_8. \end{aligned}$$

Вопросы на анализ решения.

- а) Развернутая форма какого числа (в какой системе счисления) записана в первой скобке? Во второй? В третьей?
- б) Какое максимальное (минимальное) десятичное число может быть получено в скобках? Как это число будет записано в восьмеричной системе счисления?
- в) Какие степени двойки были вынесены за скобки? Какому условию удовлетворяет показатель степени? Почему получается преобразовать вынесенный множитель в степень восьми?

Задание 2.

Переведите число 220112_3 в девятеричную систему счисления.

Указания к решению (вопросы).

- 1) Запишите число 220112_3 в развернутой форме.
- 2) Необходимо развернутую форму троичного числа преобразовать к развернутой форме записи девятеричного числа. Какие степени тройки можно записать как степени девятки?
- 3) Какую максимальную степень девяти можно выделить? В скольких слагаемых? Какую максимальную степень девяти можно выделить в оставшихся слагаемых? В скольких слагаемых?
- 4) Сгруппируйте слагаемые, вынесите общие множители, запишите их как степени девяти.
- 5) Выполните действия в скобках. Какое максимальное (минимальное) число может быть получено в скобках?
- 6) Запишите полученное число в девятеричной системе счисления.

Решение.

$$\begin{aligned} 220112_3 &= 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = \\ &= (2 \cdot 3 + 2) \cdot (3^2)^2 + (0 \cdot 3 + 1) \cdot (3^2)^1 + (1 \cdot 3 + 2) \cdot (3^2)^0 = \\ &= (2 \cdot 3 + 2) \cdot 9^2 + (0 \cdot 3 + 1) \cdot 9^1 + (1 \cdot 3 + 2) \cdot 9^0 = 815_9. \end{aligned}$$

Задание 3.

Переведите число 23071_9 в троичную систему счисления.

Указания к решению.

- 1) Запишите число 23071_9 в развернутой форме.
- 2) Замените каждую цифру девятеричного числа на развернутую запись этой цифры в троичной

системе счисления. Дополните, если это необходимо, указанную развернутую запись до двух слагаемых, недостающие слагаемые нужно взять с нулевым коэффициентом.

- 3) Представьте степени девятки в виде степеней тройки. Раскройте скобки. Развернутую форму записи какого числа вы получили? Запишите число в свернутой форме.

Решение.

$$\begin{aligned} 23071_9 &= 2 \cdot 9^4 + 3 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 = \\ &= (0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0) \cdot 9^4 + (1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0) \cdot 9^3 + (0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0) \cdot 9^2 + \\ &+ (2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0) \cdot 9^1 + (0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0) \cdot 9^0 = \\ &= (0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0) \cdot 3^8 + (1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0) \cdot 3^6 + (0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0) \cdot 3^4 + \\ &+ (2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0) \cdot 3^2 + (0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0) \cdot 3^0 = \\ &= 0 \cdot 3^9 + 2 \cdot 3^8 + 1 \cdot 3^7 + 0 \cdot 3^6 + 0 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + \\ &+ 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 210002101_3. \end{aligned}$$

Вопросы на анализ решения.

- 1) Какие максимальное и минимальное значения может принимать коэффициент при степени тройки после раскрытия скобок?
- 2) Почему при раскрытии скобок получаются разные степени числа 3?

3. Этап формирования действия в материальном (материализованном) виде

Работа с развернутой формой записи числа по сути является работой со структурной моделью числа, что, согласно Н. Ф. Талызиной [10], относится к этапу формирования действия в материализованном виде. Это означает, что на данном этапе необходимо выполнить несколько заданий на перевод из одной системы счисления в другую, используя описанную выше схему. При этом должна происходить подготовка к переходу действия на следующий этап, для чего материальная форма действия должна сочетаться с речевой, поэтому необходимо организовать беседу, результатом которой станет формулировка алгоритмов.

Задание 4.

Переведите число 1101111_2 в четверичную, шестнадцатеричную и 32-ричную системы счисления.

Указания к решению (вопросы).

- 1) Запишите число в развернутой форме.
- 2) Выполните группировку слагаемых. Какое количество слагаемых должно быть в скобках, чтобы можно было развернутую форму двоичного числа преобразовать к развернутой форме записи числа в указанной системе счисления?
- 3) Сгруппируйте слагаемые, вынесите общие множители, запишите их как степени основания указанной системы счисления, выполните действия в скобках, запишите полученное число в указанной системе счисления.

Решение.

$$\begin{aligned} 1101111_2 &= \\ &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot 2^6 + (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2) + (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= 1 \cdot 2^6 + (1 \cdot 2^1 + 0) \cdot 2^4 + (1 \cdot 2^1 + 1) \cdot 2^2 + (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= 1 \cdot 4^3 + (1 \cdot 2^1 + 0) \cdot 4^2 + (1 \cdot 2^1 + 1) \cdot 4 + (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = \\
 &= 1233_4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1101111_2 &= \\
 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\
 &= (1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0) \cdot 2^4 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0) \cdot 16^1 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 16^0 = \\
 &= 6 \cdot 16 + 15 = \\
 &= 6F_{16}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1101111_2 &= \\
 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\
 &= (1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5) + (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^5 + (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\
 &= 3 \cdot 32 + 15 = \\
 &= 3F_{32}.
 \end{aligned}$$

Вопрос на анализ решения.

Обязательно ли записывать число в развернутой форме?

Давайте проанализируем, как были получены цифры четверичного числа.

Последняя цифра числа в четверичной системе счисления получена переводом в десятичную систему счисления двоичного числа, состоящего из *двух последних цифр*, *предпоследняя* цифра числа в четверичной системе счисления получена переводом в десятичную систему счисления двоичного числа, состоящего из *двух предпоследних цифр*, и т. д.

Таким образом, можно выполнять группировку не слагаемых исходного числа в развернутой форме, а цифр числа.

Задание 5.

Переведите число 102121_3 в 27-ричную систему счисления, не используя развернутую форму записи числа.

Указания к решению (вопросы).

- 1) Какое количество цифр необходимо группировать для перевода числа из троичной системы счисления в 27-ричную? С младших или старших разрядов необходимо проводить группировку?
- 2) Переведите в десятичную систему счисления каждую группу цифр, воспринимая ее как самостоятельное троичное число.
- 3) Всегда ли полученное десятичное число можно без изменения записать в указанной системе счисления?

Решение.

$$102121_3 = 102 \cdot 121_3 = BG_{27}.$$

Задания на анализ решения (формулировку частных случаев алгоритма).

Сформулируйте алгоритм перевода числа:

- а) из двоичной системы счисления в четверичную;
- б) из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную;
- в) из троичной системы счисления в 27-ричную;
- г) из r-ричной системы счисления в q-ричную, где $q = r^m$.

Задание 6.

Переведите числа 12123_4 , 252173_8 , $10A9CF_{32}$ в двоичную систему счисления.

Указания к решению (вопросы).

- 1) Запишите число в развернутой форме.
- 2) Замените каждую цифру числа на ее развернутую запись в двоичной системе счисления. Дополните каждую развернутую запись недостающими слагаемыми с нулевыми коэффициентами, чтобы при раскрытии скобок получить развернутую форму числа в двоичной системе счисления. Какое количество слагаемых необходимо получить в каждой скобке, чтобы при раскрытии скобок были получены последовательные степени числа 2 (2^0 , 2^1 , 2^2 и т. д.)?
- 3) Представьте степени основания системы счисления в виде степеней двойки.
- 4) Раскройте скобки. Развернутую форму записи какого числа вы получите? Запишите число в свернутой форме.

Решение.

$$\begin{aligned}
 12123_4 &= \\
 &= 1 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 1 \cdot 4^4 + (1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 4^3 + \\
 &+ (0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 4^2 + (1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 4^1 + (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 4^0 = \\
 &= 1 \cdot 2^8 + (1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^6 + (0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^4 + (1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^2 + \\
 &+ (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + \\
 &+ 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \ 10 \ 01 \ 10 \ 11_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 252173_8 &= \\
 &= 2 \cdot 8^5 + 5 \cdot 8^4 + 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = \\
 &= (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 8^5 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^4 + \\
 &+ (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 8^3 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^2 + \\
 &+ (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^1 + (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^0 = \\
 &= (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^{15} + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^{12} + \\
 &+ (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^9 + (0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^6 + \\
 &+ (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^0 = \\
 &= 0 \cdot 2^{17} + 1 \cdot 2^{16} + 0 \cdot 2^{15} + 1 \cdot 2^{14} + 0 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + \\
 &+ 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + \\
 &+ 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \cdot 2^0 = \\
 &= 1010101000111011_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 109C_{32} &= \\
 &= 1 \cdot 32^3 + 0 \cdot 32^2 + 9 \cdot 32^1 + 12 \cdot 32^0 = \\
 &= (0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 32^3 + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 32^2 + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 32^1 + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 32^0 = \\
 &= (0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^{15} + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^{10} + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^5 + \\
 &+ (0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^0 = \\
 &= 0 \cdot 2^{19} + 0 \cdot 2^{18} + 0 \cdot 2^{17} + 0 \cdot 2^{16} + 1 \cdot 2^{15} + 0 \cdot 2^{14} + 0 \cdot 2^{13} + \\
 &+ 0 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \\
 &+ 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\
 &= 1000000100101100_2.
 \end{aligned}$$

Вопрос на анализ решения.

Обязательно ли записывать число в развернутой форме?

Проанализируем, как были получены цифры двоичного числа при переводе из восьмеричной системы счисления.

Последние три цифры числа в двоичной системе счисления получены переводом в двоичную систему счисления *последней цифры* восьмеричного числа, *предпоследние три* цифры числа в двоичной системе счисления получены переводом в двоичную систему счисления *предпоследней цифры*, и т. д. Заметим, что если при переводе цифры восьмеричного числа в двоичную систему счисления получалось меньше трех цифр, то соответствующие разряды дополнялись нулями.

Таким образом, нет необходимости записывать число в развернутой форме, можно представить в виде трехзначных двоичных чисел цифры исходного восьмеричного.

Задание 7.

Переведите число $10A_{125}$ в пятеричную систему счисления, не используя развернутую форму записи числа.

Указания к решению (вопросы).

- 1) Запишите каждую цифру как десятичное число, переведите его в пятеричную систему счисления.
- 2) Необходимо каждую цифру 125-ричного числа заменить на пятеричное число. Сколько знаков оно должно содержать?

Решение.

$$10A_{125} = 1\ 000\ 020\ 024_5.$$

Задания на анализ решения (формулировку частных случаев алгоритма).

Сформулируйте алгоритм перевода числа:

- а) из четверичной системы счисления в двоичную;
- б) из 125-ричной системы счисления в пятеричную;
- в) из q -ричной системы счисления в r -ричную, где $q = p^m$.

Задание 8.

Переведите число $10F_{16}$ в пятеричную систему счисления.

Решение.

$$10F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0.$$

Степени пятерки выделить не удастся, поэтому необходимо сначала перевести число в десятичную систему счисления, а затем десятичное число перевести в пятеричную систему счисления:

$$10F_{16} = 256 + 15 = 271_{10} = 2 \cdot 125 + 4 \cdot 5 + 1 = 2041_5.$$

Включение задачи 8 необходимо для корректного формирования схемы ориентировочной основы действия, так как ООД должна включать не только алгоритм действий, но и условия его применения.

Как отмечено в [10], на этапе выполнения действия в материализованной форме нельзя предлагать школьникам большое количество задач, чтобы не произошли сокращение и автоматизация действия. После того как все содержание действия будет усвоено в материализованной форме, его необходимо переводить на этап формирования внешнеречевого действия.

4. Этап формирования внешнеречевого действия

На этом этапе все элементы действия должны быть представлены в форме внешней речи. Из содержания действия с конкретными системами счисления, представленными в задачах 1–8, обучающиеся должны выделить черты и свойства, которые существенны для действия в целом, и сформулировать **алгоритмы перевода в общем виде**.

Алгоритм перевода числа X из p -ричной системы счисления в q -ричную, где $q = p^m$. Для того чтобы перевести число X из p -ричной системы счисления в q -ричную, где $q = p^m$, необходимо разбить запись числа X на группы по m знаков, начиная с младших разрядов числа, рассматривая каждую группу как p -ричное число, перевести ее в десятичную систему счисления, записать результат как цифру q -ричной системы счисления.

Алгоритм перевода числа X из q -ричной системы счисления в p -ричную, где $q = p^m$. Для того чтобы перевести число X из q -ричной системы счисления в p -ричную, где $q = p^m$, необходимо заменить каждую цифру числа X ее записью в p -ричной системе счисления, дополненной нулями до m знаков, если это необходимо.

После формулировки алгоритмов можно предложить школьникам их доказательство в общем виде. Подобные доказательства приведены в учебном пособии [1].

Стоит отметить, что перенесение действия в речевой план означает не умение рассказать о том, как надо действовать, а умение выполнять действие в речевой форме. По сути, необходимо вызвать каждого ученика к доске и попросить перевести число из одной системы счисления в другую, проговаривая каждый шаг. В силу понятных обстоятельств в старшем звене реализовать такой подход невозможно. Авторы теории поэтапного формирования умственных действий отмечают, что пропуск внешнеречевого этапа значительно затрудняет процесс формирования действия даже при условии всесторонней организации его усвоения на других этапах. В исследованиях Н. Ф. Талызиной было показано, что использование письменной формы речи на этом этапе оказывается не менее эффективным, чем устной [10], поэтому представляется целесообразным предложить школьникам задания на работу с текстом алгоритма и вербальное использование алгоритма.

Приведем примеры таких заданий.

Задание 9.

Заполните пропуски в описании алгоритма:

- 1) Для того чтобы перевести число X из *двоичной* системы счисления в *четверичную*, необходимо разбить запись числа X на группы по ___ знаков, начиная с младших разрядов числа, рассматривая каждую группу как ___-ичное число, перевести ее в ___-ичную систему счисления, записать результат как цифру ___-ричной системы счисления.
- 2) Для того чтобы перевести число X из *десятиричной* системы счисления в *троичную*, необходимо заменить каждую цифру числа X на ее запись в ___-ичной системе счисления, дополненной слева нулями до ___ знаков, если это необходимо.

- 3) Для того чтобы перевести число X из *троичной* системы счисления в *81-ричную*, необходимо разбить запись числа X на группы по ___ знака, начиная с младших разрядов числа, рассматривая каждую группу как ___-ичное число, перевести ее в ___-ичную систему счисления, записать результат как цифру ___-ричной системы счисления.
- 4) Для того чтобы перевести число X из *64-ричной* системы счисления в *четверичную*, необходимо заменить каждую цифру числа X ее записью в ___-ричной системе счисления, дополненной слева нулями до ___ знаков, если это необходимо.
- 5) Для того чтобы перевести число X из p -ричной системы счисления в q -ричную, где $q = p^m$, необходимо разбить запись числа X на группы по ___ знаков, начиная с ___ разрядов числа, рассматривая каждую группу как ___-ричное число, перевести ее в ___-ричную систему счисления, записать результат как цифру ___-ричной системы счисления.
- 6) Для того чтобы перевести число X из q -ричной системы счисления в p -ричную, где $q = p^m$, необходимо заменить каждую цифру числа X на ее запись в ___-ричной системе счисления, дополненной слева нулями до ___ знаков, если это необходимо.

Задание 10.

Можно ли применять описанный алгоритм для перевода:

- а) из двоичной системы счисления в восьмеричную;
- б) из шестнадцатеричной системы счисления в восьмеричную;
- в) из троичной системы счисления в девятеричную;
- г) из двоичной системы счисления в 32-ричную;
- д) из 125-ричной системы счисления в 25-ричную;
- е) из p -ричной системы счисления в k -ричную, если $p = 2^k$;
- ж) из p -ричной системы счисления в k -ричную, если $p = k^2$;
- з) из p -ричной системы счисления в k -ричную, если $p = k^p$?

Задание 11.

Ответьте на вопросы:

- а) При переводе числа X из двоичной системы счисления в восьмеричную ученик разбил цифры числа X на группы по три цифры, начиная с левой цифры, и каждую такую группу заменил одной цифрой в восьмеричной системе счисления. Какую ошибку допустил ученик?
- б) При переводе числа X из 81-ричной системы счисления в троичную ученик разбил цифры числа X на группы по четыре цифры, начиная с правой цифры, и каждую такую группу заменил одной цифрой в троичной системе счисления. Какую ошибку допустил ученик?
- в) При переводе числа X из 25-ричной системы счисления в пятеричную ученик заменил каждую цифру числа X на ее запись в пятеричной системе счисления, дополненной слева нулями до трех цифр. Какую ошибку допустил ученик?
- г) При переводе числа X из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную ученик разбил

цифры числа X на группы по три цифры, начиная с правой цифры, и каждую такую группу заменил одной цифрой в шестнадцатеричной системе счисления. Какую ошибку допустил ученик?

- д) При переводе числа X из четверичной системы счисления в восьмеричную ученик разбил цифры числа X на группы, начиная с правой цифры, и каждую такую группу заменил одной цифрой в восьмеричной системе счисления. Какую ошибку допустил ученик?

5. Этап формирования действия во внешней речи про себя

Этап формирования действия во внешней речи про себя отличается от предыдущего тем, что действие выполняется беззвучно и без прописывания, как проговаривание про себя.

Ниже представлены задания, выполнение которых будет способствовать проговариванию алгоритма про себя. На данном этапе можно осуществлять контроль выполнения задания, попросив ученика обосновать ответ.

Задание 12.

Подчеркните/исправьте ошибки в решении задачи:
а) Переведите число 121212₃ в 81-ричную систему счисления.

Решение: 121212₃ = 12 12 12₃ = 555₈₁.

- б) Переведите число 21204₅ в 25-ричную систему счисления.

Решение: 21204₅ = 21 20 4₅ = BA₂₅.

- в) Переведите число 10020112₄ в 64-ричную систему счисления.

Решение: 10020112₄ = 10 020 112₄ = 4822₆₄.

- г) Переведите число 1032₄ в восьмеричную систему счисления.

Решение: 1012₄ = 10 12₄ = 46₈.

- д) Переведите число B1A4₂₅ в пятеричную систему счисления.

Решение: B1A4₂₅ = 21 1 20 4₅ = 211204₅.

Задание 13.

Ответьте на вопросы:

- а) Как изменится количество цифр числа, если его перевести:
 - из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную;
 - из троичной системы счисления в девятеричную;
 - из семеричной системы счисления в 343-ричную?
- б) Какой будет последняя цифра в записи числа в троичной системе счисления, если в девятеричной системе счисления запись этого числа:
 - заканчивается цифрой 4;
 - заканчивается цифрой 5?
- в) Запись числа в шестнадцатеричной системе счисления заканчивается цифрой 4. Какой будет последняя цифра в записи этого числа:
 - в двоичной системе счисления;
 - в четверичной системе счисления;
 - в восьмеричной системе счисления?

6. Этап формирования действия во внутренней речи

На этом этапе действие должно стать автоматизированным и недоступным самонаблюдению. В работе [4] показано, что выпадают, прежде всего, обосновывающие (ориентировочные) элементы мыслительной деятельности, оперативные (исполнительные) элементы претерпевают сокращение позже. Очевидно, что способствовать автоматизации действия будет выполнение достаточного количества стандартных упражнений на перевод чисел между системами счисления, включая задания, в которых использование изучаемого алгоритма невозможно. Задание 14 является примером набора таких упражнений.

Задание 14.

- Переведите в восьмеричную систему счисления числа: 10111000_2 , ABC_{16} , 123_{64} , 25_7 .
- Переведите в шестнадцатеричную систему счисления числа: $1011\ 1000_2$, 275_8 , 123_4 , 27_9 .
- Переведите в девятеричную систему счисления числа: 220112_3 , 11100_2 , $A0B1_{27}$.
- Переведите в двоичную систему счисления числа: 125_{10} , 125_8 , 125_{16} , 12123_4 , 123_5 .
- Переведите в 25-ричную систему счисления число 3420212341002_5 .

7. Дальнейшее развитие умственного действия

Как отмечает Н. Ф. Талызина, доведение действия до умственного этапа не означает конца его развития [10]. Умственные действия, усваиваемые субъектом в процессе развития, используются в дальнейшем для решения различных задач, которые могут потребовать воссоздания исходной, развернутой формы действия.

Ниже приведен пример набора задач, использование которого целесообразно на данном этапе. В набор входят модификации упражнений в формате ЕГЭ (докомпьютерная версия) [8], заданий, предложенных Е. А. Мирончик (см. в [7]), и задачи авторов статьи.

1. Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 3, 9, 27. $X = E*_{27} = *8*_9 = *****_{13}$. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены знаком *. Сколько чисел соответствуют условию?
2. В семеричной системе счисления число имеет 16 цифр. Сколько цифр будет в записи числа, если его перевести в 343-ричную систему счисления?
3. Сколько цифр в девятеричной записи числа $3^{15} + 3^{17}$?
4. Какая первая цифра в 125-ричной записи числа $5^{1015} + 5^{275}$?
5. Укажите наименьшее четырехзначное шестнадцатеричное число, которое в четверичной системе счисления имеет ровно два нуля. В ответе запишите только само шестнадцатеричное число, основание системы счисления указывать не нужно.
6. Укажите наибольшее из чисел: 36_9 , 10_{27} , 100_{23} , 27_{10} .

7. Укажите наибольшее из чисел: 65_{36} , 10_{216} , 1004_6 , 216_{10} .
8. Вычислите: $121212_3 - 555_9 + 7_{27}$. Ответ запишите в десятичной системе счисления.
9. Найдите двузначное десятичное число, которое в двоичной, четверичной и восьмеричной системах счисления состоит из одинаковых цифр.
10. Найдите четырехзначное десятичное число, которое в двоичной, четверичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления состоит из одинаковых цифр.
11. Найдите минимальное (максимальное) трехзначное десятичное число, которое в 3-ричной, 9-ричной и 27-ричной системах счисления состоит из одинаковых цифр.
12. Найдите самое большое число, у которого в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления одинаковое количество цифр.
13. Одно и то же число записано в двоичной, четверичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления, в каждом представлении в числе ровно две единицы и какое-то количество нулей. Найдите минимальное такое число.

8. Заключение

Описанные в статье задачи могут использоваться для организации работы с учащимися на серии уроков, посвященных изучению алгоритмов перевода чисел между системами счисления, где основание одной есть степень основания другой. Очевидно, что фронтальная работа должна чередоваться с индивидуальной самостоятельной работой учащихся. Опыт авторов показывает, что для освоения этой темы достаточно шести уроков, три из которых посвящены самостоятельной работе школьников.

Использование основных положений теории поэтапного формирования умственных действий при разработке набора задач позволяет создать условия для достижения более устойчивых предметных результатов обучения не только по теме «Системы счисления», но и по темам «Логика» и «Программирование».

Список источников

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. Элективный курс: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 328 с.
2. Выготский Л. С. Мышление и речь. М.: Лабиринт, 1999. 352 с.
3. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 45 с.
4. Гальперин П. Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий»: доклад на соискание учен. степени доктора пед. наук (по психологии) по совокупности работ. М.: Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 1965. 51 с.
5. Заводчикова Н. И., Быкова И. А., Мешвелиани К. З., Семенова О. Г. Формирование понятийного аппарата темы «Системы счисления» // Математика и информатика, астрономия и физика и совершенствование их преподавания. Материалы Международной конференции «Чтения Ушинского». Ярославль, 2020. С. 223–228.
6. Заводчикова Н. И., Быкова И. А., Шаулина Д. С. Методика разработки укрупненных упражнений при преподавании темы «Системы счисления» // Математика и информатика,

астрономия и физика и совершенствование их преподавания. материалы Международной конференции «Чтения Ушинского». Ярославль, 2020. С. 215–218.

7. Поляков К. Ю. ЕГЭ по информатике (2023) // Сайт К. Ю. Полякова. <https://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm>

8. Сдам ГИА. Решу ЕГЭ. <https://inf-ege.sdamgia.ru>

9. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология: учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений. М.: Академия, 1998. 288 с.

10. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 345 с.