



DOI: 10.32517/2221-1993-2022-21-1-81-84

А. М. Магомедов, Н. Ш. Раджабова

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Республика Дагестан, Россия

ЗАМОЩЕНИЕ КЛЕТЧАТОЙ ПОЛОСЫ ШИРИНОЙ 4*

Аннотация

Рассматривается проблема подсчета числа всевозможных покрытий клетчатого прямоугольника $n \times m$ (n строк, m столбцов) плитками размером 1×2 без пропусков и наложений. Поскольку при нечетных n и m покрытий не существует, предполагается, что хотя бы один из этих двух параметров имеет четное значение. Предлагается решение задачи о подсчете количества всевозможных покрытий плитками размером 1×2 полосы клетчатой бумаги с шириной 4 и заданной высотой.

Приведен краткий обзор известных подходов к решению задачи определения числа всевозможных покрытий a_n при $m = 2$ и $m = 3$. В данной статье получена рекуррентная формула для вычисления a_n в случае $m = 4$.

Для этого предлагается метод начальной клетки для укладки плиток, на основе которого построена система из трех рекуррентных формул для вычисления a_n при $n \geq 3$ и $m = 4$. Затем из системы выведена одна рекуррентная формула для a_n .

Ключевые слова: задача «Паркет», замощение костями домино, количество покрытий, рекуррентное соотношение.

1. Задача подсчета покрытий прямоугольника

Рассмотрим задачу подсчета числа всевозможных покрытий клетчатого прямоугольника $n \times m$ (n строк, m столбцов) плитками размером 1×2 без пропусков и наложений. Когда значение m однозначно определяется из контекста, число всевозможных покрытий будем обозначать через a_n . Поскольку при нечетных n и m покрытий не существует, предполагается, что хотя бы один из этих двух параметров имеет четное значение.

Здесь термин *покрытие* сходен по значению со словами *паркетаж*, *разбиение* и *замощение* [9, с. 16] (см. также [3], задача 20 на с. 53). Впервые задача исследована в [2, 8], где показано, что для вычисления a_n в случае $m = 2$ достаточно одной рекуррентной формулы, в случае

$m = 3$ удается построить систему из двух рекуррентных формул. Для небольших n и m задача была предложена на VI Всероссийской олимпиаде школьников по информатике [1, 5].

При малых n и m число всевозможных покрытий может быть найдено методом динамического программирования [1, 4]. В [10] найдена формула для a_n как функции от n при $0 \leq n \leq 8$. В [6] представлен способ вычисления коэффициентов рекуррентной формулы, использующей для нахождения a_n (количества разбиений при фиксированном значении параметра m) лишь операции сложения и умножения целых чисел. Исследование задачи замощения продолжает вызывать интерес (см. [4, 6, 7, 11] и др.).

В случае $m = 2$ (см., например, [1, с. 52–54]) укладка плиток у верхней границы прямоугольника соответству-

* Работа выполнена при поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

Контактная информация

Магомедов Абдулкарим Магомедович, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дискретной математики и информатики, Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Республика Дагестан, Россия; *адрес:* 367000, Россия, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. Гаджиева, д. 43-а; *e-mail:* magomedtagir1@yandex.ru

Раджабова Наима Шамильевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры дискретной математики и информатики, Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Республика Дагестан, Россия; *адрес:* 367000, Россия, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. Гаджиева, д. 43-а; *e-mail:* naimasha@gmail.com

A. M. Magomedov, N. Sh. Radzhabova

Dagestan State University, Makhachkala, The Republic of Dagestan, Russia

TILING A CHECKERED STRIP WITH A WIDTH OF 4

Abstract

The problem of calculating the number of all possible coverings of a checkered rectangle $n \times m$ (n rows, m columns) by tiles 1×2 without gaps and overlaps is considered. Since there are no coverings for odd n and m , it is assumed that at least one of these two parameters has an even value. A solution to the problem of calculating the number of various coverings with tiles of sizes 1×2 strips of checkered paper with a width of 4 and a given height is proposed.

A brief overview of known approaches to solving the problem of determining the number of all possible coverings a_n for $m = 2$ and $m = 3$ is given. In this article, a recursive formula is obtained for calculating a_n in the case $m = 4$.

For this, a method of the initial cell for laying tiles is proposed, on the basis of which a system of three recurrent formulas for calculating a_n for $n \geq 3$ and $m = 4$ is built. Then one recurrent formula for a_n is deduced from the system.

Keywords: task "Parquet", paving with dominoes, number of coverings, recurrent ratio.

ет рисункам 1, a или b . Число способов продолжения каждого из этих двух вариантов равно соответственно a_{n-1} и a_{n-2} , поэтому:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \quad (1)$$

С учетом очевидных равенств $a_1 = 1, a_2 = 2$ получим числа Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, ...

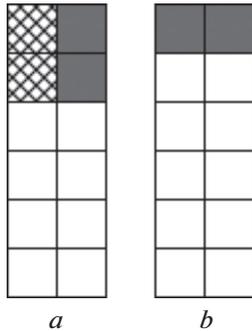


Рис. 1. При $m = 2$ покрытие верхней левой клетки горизонтальной или вертикальной плиткой соответствует слагаемым рекуррентной формулы (1)

Для случая $m = 3$ задача рассмотрена, например, в [7], где, в частности, получена рекуррентная формула:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-4},$$

где n — четное число.

В данной статье будет получена рекуррентная формула для вычисления a_n в случае $m = 4$.

2. Система рекуррентных формул

В этом разделе мы построим систему из трех формул для вычисления a_n в случае $m = 4$.

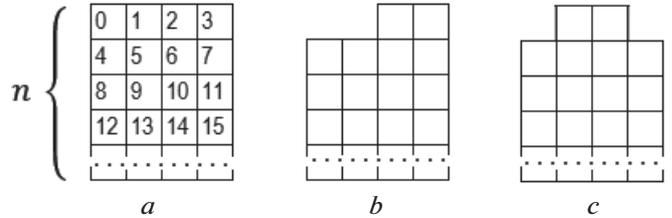


Рис. 2. Высоты фигур равны n

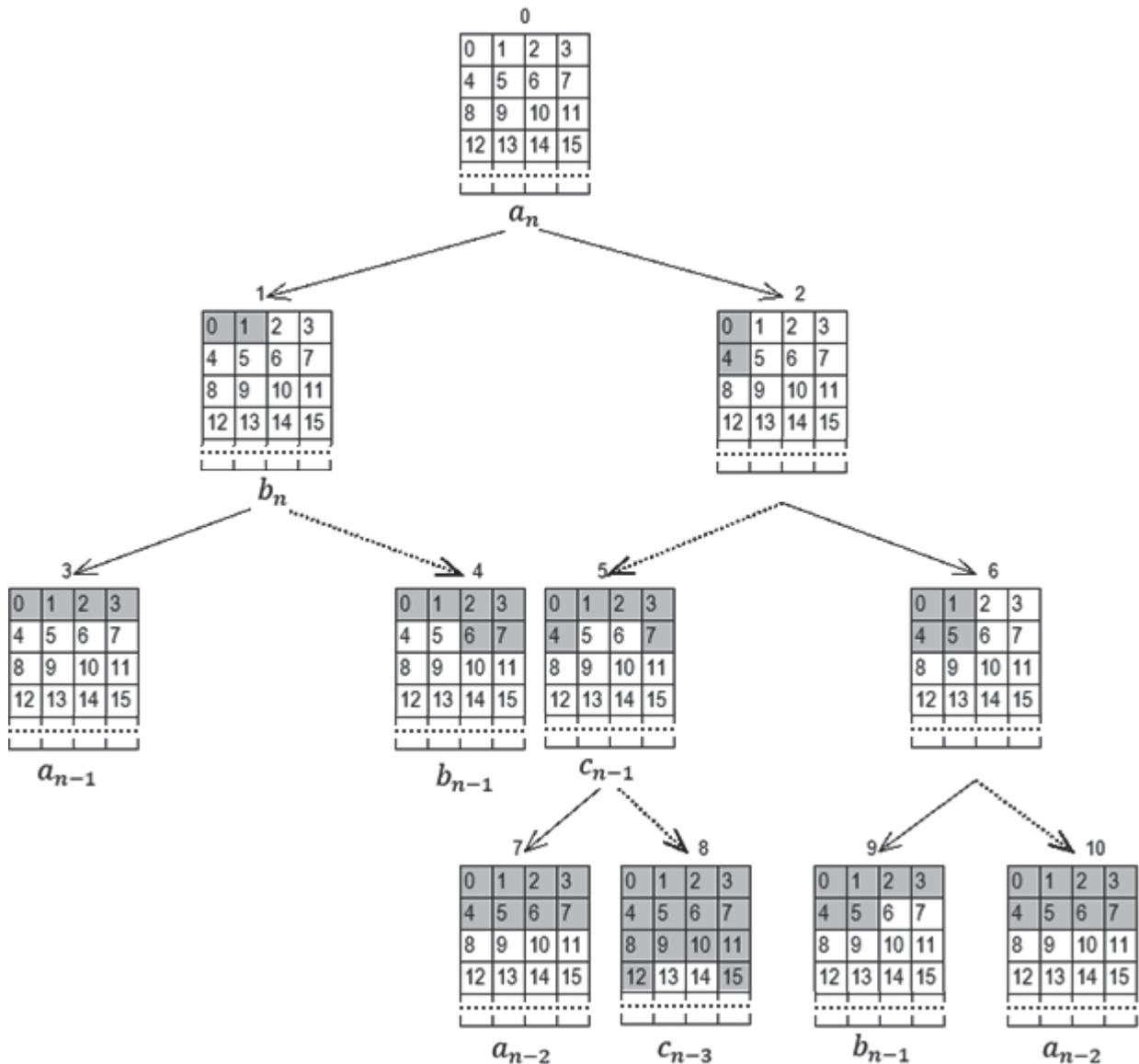


Рис. 3. Для каждой фигуры i . с.п. равно сумме ч. с.п. двух фигур, к которым от данной фигуры проведены стрелки

Упорядочим клетки прямоугольника так, как показано на рисунке 2, а. Множество непокрытых пока клеток будем называть *фигурой*, из них клетку с наименьшим номером — *начальной клеткой*.

Обозначим число способов покрытия (далее кратко: ч. с.п.) фигур с высотой n , приведенных на рисунках 2, а, 2, b и 2, c , через a_n , b_n и c_n соответственно. Будем укладывать плитки на клетчатый прямоугольник таким образом, чтобы очередная плитка покрывала начальную клетку. Такой способ укладки плиток будем называть *методом начальной клетки*.

Начальную клетку исходного прямоугольника, отмеченного на рисунке 3 номером 0, можно покрыть как «горизонтальной» (0–1), так и «вертикальной» (0–4) плиткой. В результате непокрытыми останутся фигуры с номерами 1 и 2 соответственно. Если начальную клетку 2 фигуры 1 покрыть горизонтальной плиткой 2–3, получим фигуру с номером 3; в фигуре, полученной покрытием этой же клетки вертикальной плиткой 2–6, начальной клеткой будет клетка 3, а единственно допустимым продолжением — укладка вертикальной плитки 3–7, что приводит к фигуре 4. Таким образом, ч. с.п. фигуры 1 равно сумме ч. с.п. фигур 3 и 4:

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

или, в более удобном для дальнейшего использования виде:

$$a_{n-1} = b_n - b_{n-1}. \quad (2)$$

Рассмотрим на рисунке 3 фигуру с номером 5 и ч. с.п., равным c_{n-1} . Ее начальная клетка 5 допускает покрытие как горизонтальной плиткой 5–6 (результат — фигура с номером 7 и числом способов покрытия a_{n-2}), так и вертикальной плиткой 5–9. Начальная клетка 6 фигуры F_1 , полученной во втором случае, допускает только покрытие вертикальной плиткой 6–10. У полученной в результате фигуры F_2 начальной клеткой будет клетка с номером 8, которая также допускает единственное покрытие (плиткой 8–12), а вслед за ней однозначно будет положена вертикальная плитка 11–15. В результате мы получили фигуру, размещенную на рисунке 3 под номером 8, число способов покрытия которой равно c_{n-3} . Таким образом, ч. с.п. фигуры с номером 5 равно сумме ч. с.п. фигуры с номером 7 и фигуры с номером 8:

$$c_{n-1} = a_{n-2} + c_{n-3}. \quad (3)$$

Приступим к выводу третьей формулы. Искомое число a_n для фигуры 0 равно сумме ч. с.п. фигур с номерами 1 (число b_n) и 2. Ч.с. п. фигуры с номером 2 равно сумме ч. с.п. фигур с номерами 5 (число c_{n-1}) и 6. Наконец, ч. с.п. фигуры 6, как легко убедиться, равно сумме чисел способов покрытий фигур 9 и 10, то есть $b_{n-1} + a_{n-2}$.

Получили формулу:

$$a_n = a_{n-2} + b_n + b_{n-1} + c_{n-1}. \quad (4)$$

Запишем полученные формулы (2), (3) и (4) в виде системы:

$$\begin{cases} a_{n-1} = b_n - b_{n-1}, \\ c_{n-1} = a_{n-2} + c_{n-3}, \\ a_n = a_{n-2} + b_n + b_{n-1} + c_{n-1}. \end{cases} \quad (5)$$

Начальные значения a_n , b_n , c_n при $n = 1$ и $n = 2$ можно легко вычислить:

$$a_1 = 1, a_2 = 5, b_1 = 1, b_2 = 2, c_1 = 1, c_2 = 1.$$

Используя эти значения и соотношения (5), можно вычислить a_n для $n \geq 3$.

Следует, однако, признать, что необходимость вычислять элементы трех последовательностей — $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ — несколько снижает ценность полученных соотношений. В следующем разделе мы покажем, как найти одну рекуррентную формулу для a_n .

3. Рекуррентная формула для вычисления a_n

Из формулы (4) выразим c_{n-1} :

$$c_{n-1} = a_n - a_{n-2} - b_n - b_{n-1}.$$

Заменив в этой формуле индекс n на $n - 2$, получим равенство:

$$c_{n-3} = a_{n-2} - a_{n-4} - b_{n-2} - b_{n-3}.$$

Подставив полученные выражения для c_{n-1} и c_{n-3} в формулу (3), получим соотношение:

$$a_n - a_{n-2} - b_n - b_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-2} - a_{n-4} - b_{n-2} - b_{n-3}.$$

Или, после очевидных упрощений:

$$a_n - 3a_{n-2} + a_{n-4} = b_n + b_{n-1} - b_{n-2} - b_{n-3}. \quad (6)$$

Если преобразовать правую часть (6) к виду

$$(b_n - b_{n-1}) + 2(b_{n-1} - b_{n-2}) + (b_{n-2} - b_{n-3})$$

и заменить заключенные в скобки разности в соответствии с формулой $a_{n-1} = b_n - b_{n-1}$ (см. формулу (2)), то получим равенство:

$$a_n - 3a_{n-2} + a_{n-4} = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Или окончательно:

$$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}. \quad (7)$$

Надо заметить, что для использования соотношения (7) необходимо будет найти четыре первых значения a_1, a_2, a_3 и a_4 . Но сделать это совсем не сложно (для этой цели удобнее всего воспользоваться системой (5)).

4. Заключение

Одним из интересных продолжений представляется решение линейных рекуррентных соотношений, подобных (7), т. е. поиск формулы для a_n как функции от n . Но это уже совсем другая история...

Список источников

1. Волченков С. Г. Задача «Паркет» // Информатика и образование. 1994. № 3. С. 52–54.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
3. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи / под ред. В. О. Бугаенко. 4-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2008. 96 с.

4. *Караваев А. М.* Метод динамического программирования для подсчета замощений домино на прямоугольной решетке и цилиндре // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2013. № 6 (53). С. 13–18.
5. *Кирюхин В. М.* VI Всероссийская олимпиада школьников по информатике // Информатика и образование. 1994. № 3. С. 47–50.
6. *Магомедов А. М., Магомедов Т. А., Лавренченко С. А.* Взаимно-рекуррентные формулы для перечисления разбиений прямоугольника // Прикладная дискретная математика. 2019. № 46. С. 108–121.
7. *Нурлигареев Х. Д.* Полоски из домино // Наука и общество. Новости науки и техники. <https://ru.sciencenetnews.com/poloski-iz-domino>
8. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete Mathematics. Massachusetts: Addison-Wesley, 1994. 657 p.
9. *Grünbaum B., Shephard G. C.* Tilings and Patterns. New York: W. H. Freeman & Co., 1987.
10. *Klarner D., Pollack J.* Domino tilings of rectangles with fixed width // Discrete Mathematics, 1980. Vol. 32. P. 45–52.
11. *Rao M.* Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. <https://perso.ens-lyon.fr/michael.rao/publi/penta.pdf>