

Д. М. Златопольский

Музей истории вычислительной техники школы № 1530 «Школа Ломоносова», г. Москва, Россия

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕВОДА ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

Аннотация

В статье описывается ряд малоизвестных методов перевода натуральных чисел из одной системы счисления в другую. Первым приводится метод перевода больших чисел из десятичной системы в двоичную, основанный на многократном делении нацело заданного числа и всех промежуточных частных на 64 (или другое число, равное 2^n) с последующей записью последнего частного и полученных остатков в двоичном виде. Затем описываются два метода взаимного перевода десятичных и двоичных чисел, основанные на так называемой схеме Горнера. Приводится также оптимальный вариант перевода чисел в двоичную систему счисления методом деления на два. В заключение публикуется фрагмент рукописи конца XVI — начала XVII века, иллюстрирующий перевод в двоичную систему методом выделения максимальной степени числа 2. Предлагаются задания для самостоятельной работы учащихся.

Ключевые слова: информатика, двоичная система счисления, нестандартные методы, перевод в двоичную систему.

DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-9-28-30

В данной статье мы рассмотрим несколько малоизвестных методов перевода натуральных чисел из одной системы счисления в другую.

1. Перевод больших целых десятичных чисел в двоичную систему [5]*

Проиллюстрируем метод перевода больших целых десятичных чисел в двоичную систему на конкретном примере — перевод числа 11 183 445.

Разделим данное число нацело на 64 — получим частное 174 741 и остаток 21.

Проведем это же действие (деление нацело на 64) с числом 174 741 — получим, соответственно, 2730 и 21.

Для числа 2730 соответствующие результаты — 42 и 42. Так как получено целочисленное частное, меньшее 64, деление прекращаем. Выпишем последнее частное и все остатки, начиная «от конца»:

42 42 21 21.

* Обращаем внимание читателей на тот факт, что описанный ниже метод был представлен в книге, изданной в конце XVIII (!) века.

Если заменить приведенные четыре числа на их двоичное представление — соответственно 101010 и 010101 (это можно сделать и в уме), то можно получить искомое двоичное число:

101010101010010101010101

Конечно, вместо числа 64 может быть использовано любое число — степень двойки, с учетом того, что чем меньше будет это значение, тем проще будет переводить полученные остатки в двоичную систему, но количество операций деления при этом будет больше.

Задание для самостоятельной работы учащихся.

Переведите описанным методом в двоичную систему счисления числа:

- 1) 45292;
- 2) 456 735;
- 3) 1 234 554 321.

2. Перевод целых чисел из двоичной системы в десятичную

Метод был предложен в 1953 году Соденом (см. [2]) и заключается в следующем.

Контактная информация

Златопольский Дмитрий Михайлович, канд. тех. наук, доцент, руководитель музея истории вычислительной техники, школа № 1530 «Школа Ломоносова», г. Москва, Россия; *адрес:* 107014, Россия, г. Москва, ул. Егерская, д. 4; *e-mail:* zlatonew@gmail.com

D. M. Zlatopolski

School 1530 "Lomonosov School", Moscow, Russia

NON-STANDARD METHODS FOR CONVERTING NUMBERS FROM ONE NUMBER SYSTEM TO ANOTHER

Abstract

The article describes a number of little-known methods for translating natural numbers from one number system to another. The first is a method for converting large numbers from the decimal system to the binary system, based on multiple divisions of a given number and all intermediate quotients by 64 (or another number equal to 2^n), followed by writing the last quotient and the resulting remainders in binary form. Then two methods of mutual translation of decimal and binary numbers are described, based on the so-called «Horner scheme». An optimal variant of converting numbers into the binary number system by the method of division by 2 is also given. In conclusion, a fragment of a manuscript from the beginning of the late 16th — early 17th centuries is published with translation into the binary system by the method of highlighting the maximum degree of number 2. Assignments for independent work of students are offered.

Keywords: informatics, binary number system, non-standard methods, converting into binary number system.

Сначала надо перевести число из двоичной системы в восьмеричную (это можно сделать в уме, разбив двоичное число на тетрады и записав вместо них соответствующую десятичную цифру).

Далее для полученного n -значного восьмеричного числа выполняются $(n - 1)$ шагов по переводу его в десятичную систему.

Проиллюстрируем все на примере.

Пусть надо перевести в десятичную систему двоичное число 111110000.

Сначала представим данное число в виде восьмеричного:

$$111110000_2 = 1760_8.$$

Число 1760 — четырехзначное, т. е. $n = 4$ и шагов перевода восьмеричного числа в десятичную систему будет три ($n - 1 = 4 - 1 = 3$).

На первом шаге надо из числа 1760, рассматривая его как десятичное, вычесть удвоенное произведение его первой цифры на 100 (на 10^{n-2}):

$$\begin{array}{r} 1760 \\ - 200 \quad (\text{При большом количестве конечных нулей их, с целью экономии времени, можно не выписывать.}) \\ \hline 1560 \end{array}$$

На втором шаге надо из полученной разности (также рассматривая ее как десятичную) вычесть удвоенное произведение двузначного числа, образованного первой и второй цифрами разности, на 10 (на 10^{n-3}):

$$\begin{array}{r} 1560 \\ - 300 \\ \hline 1260 \end{array}$$

На третьем, в данном случае последнем, шаге вычитается удвоенное произведение трехзначного числа, образованного тремя первыми цифрами последней разности, на 1 (на 10^0 , или на 10^{n-4}):

$$\begin{array}{r} 1260 \\ - 252 \\ \hline 1008 \end{array}$$

Полученное число и будет искомым десятичным (проверьте!).

Видно, что при переводе используются только умножение на два и вычитание.

Задание для самостоятельной работы учащихся.

Чтобы оценить преимущества описанного способа, переведите им в десятичную систему двоичное число 11101110010101011.

3. Перевод целых чисел из десятичной системы в двоичную

Метод предложен Ш. Розье в 1962 году (см. [2]). Он почти такой же, что и описанный чуть выше* (только, можно сказать, «наоборот»).

Сначала переводим заданное число в восьмеричную систему по методике, которую проиллюстрируем на примере десятичного числа 1945.

Надо выполнить три шага (число 1945 — четырехзначное):

1-й шаг:

$$\begin{array}{r} 1945 \\ + 200 \quad (\text{Внимание! Все действия здесь и ниже выполняются в восьмеричной системе.}) \\ \hline 2345 \end{array}$$

2-й шаг:

$$\begin{array}{r} 2345 \\ + 460 \\ \hline 3025 \end{array}$$

3-й шаг:

$$\begin{array}{r} 3025 \\ + 604 \\ \hline 3631 \end{array}$$

Итак, $1945_{10} = 3631_8$.

После этого осталось перевести полученное восьмеричное число в двоичную систему (что несложно):

$$3631_8 = 11110011001_2.$$

Задание для самостоятельной работы учащихся.

Переведите в двоичную систему способом Розье десятичное число 12 345 678 987 654 321.

Конечно, методами Содена и Розье** можно осуществлять и только взаимный перевод десятичных и восьмеричных чисел.

4. Компактное представление метода последовательного деления

Вспомним также известные методы перевода целого десятичного числа в двоичную систему счисления.

Один из них, как известно, называют «метод последовательного деления на основание» [1].

Для перевода целого десятичного числа в систему счисления с основанием p следует разделить нацело на p исходное число, а затем все промежуточные частные, выписывая при этом получающиеся остатки, до тех пор, пока частное не станет меньше p . Результат получается выписыванием последнего частного и всех остатков в обратном порядке.

Например, при переводе числа 13 в двоичную систему получаем:

$$\begin{array}{r} 13 : 2 = 6 \text{ ост. } 1 \\ 6 : 2 = 3 \text{ ост. } 0 \\ 3 : 2 = 1 \text{ ост. } 1 \\ 1 : 2 = 0 \text{ ост. } 1 \end{array}$$

Результат равен 1101_2 (цифры результата выделены выше полужирным начертанием).

Между тем процесс получения результата может быть оформлен гораздо компактнее (т. е. и результат будет получен быстрее):

** К сожалению, в книге [2] не указаны имена авторов методов и страны, в которых они проживали. Нам также не удалось найти такую информацию.

* Оба метода основаны на так называемой схеме Горнера [4].

13	1
6	
3	1
1	1

Нетрудно увидеть, что слева выписываются результаты деления заданного числа и всех промежуточных частных на 2, а справа — остатки от такого деления, равные 1. Результат получается выписыванием единиц снизу вверх с «добавлением» нулей.

Положительный эффект будет еще больше при переводе больших чисел. Например, сравните две записи перевода для числа 360:

3 6 0	2	360	
3 6 0 1 8 0	2	180	
0 1 8 0 9 0	2	90	
0 9 0 4 5	2	45	1
0 4 4 2 2	2	22	
1 2 2 1 1	2	11	1
0 1 0 5	2	5	1
1 4 2	2	2	
1 2 1	2	1	1
0			

5. Старинная иллюстрация метода выделения наибольшей степени числа 2

Пользуясь случаем (и несколько отвлекаясь), приведем редкое изображение, иллюстрирующее другой известный метод перевода целого десятичного числа в двоичную систему счисления — метод выделения наибольшей степени числа 2 (рис. 1). Это фрагмент из трудов английского математика, географа и астронома Томаса Харриота (1560–1621) [3], показывающий перевод десятичного числа 109 в двоичную систему счисления (числа 7, 6 и другие — это увеличенные на 1 показатели степеней, которые потом используются для записи единиц в двоичном представлении).

109	7	1101101
64	6	
45	5	
32	4	
13	3	
8	2	
5	1	
4	0	
1	0	

Рис. 1

Знаменательно, что указанный метод использован в конце XVI — начале XVII века!

Дополнение

Когда статья уже была подготовлена к печати, автор ознакомился с книгой «Arithmetica binaria sive dyadica das ist Die Kunst nur mit zwey Zahlen in allen vorkommenden Fällen sicher und leicht zu rechnen» («Арифметика бинарная или двоичная — искусство точных и простых вычислений с использованием только двух цифр»), изданной в 1775 году (рис. 2).



Рис. 2. Титульный лист книги

В ней ее автор, Georg Friedrich Brandet, приводит такое изображение, иллюстрирующее перевод двоичного числа 110111010 в десятичную систему счисления (рис. 3):

1	ist	gleich	1
11	:	:	3
110	:	:	6
1101	:	:	13
11011	:	:	27
110111	:	:	55
1101110	:	:	110
11011101	:	:	221
110111010	:	:	442

Рис. 3. Иллюстрация перевода двоичного числа 110111010 в десятичную систему

Методика перевода заключается в следующем.

Последовательно приписывается по одной двоичной цифре начиная с крайней левой единицы, и определяется десятичный эквивалент нового числа.

Приписывание нуля, как известно, соответствует удвоению десятичного числа, приписывание единицы — удвоению и прибавлению 1.

Ответ: 442.

Такой метод перевода двоичных чисел в десятичные (описанный в XVIII веке!), как нам кажется, лучше традиционного, современного, при котором надо определять весомости разрядов с двоичными единицами (степени числа 2) и складывать все весомости. А как он вам, уважаемый читатель?

Список использованных источников

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 328 с.
2. Гашков С. Б. Занимательная компьютерная арифметика. Математика и искусство счета на компьютерах и без них. М.: URSS, 2017. 448 с.
3. Златопольский Д. М., Шилов В. В. Из истории двоичной системы счисления. Томас Харриот // Информатика в школе. 2020. № 6. С. 19–23. DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-6-19-23
4. Схема Горнера. https://ru.wikipedia.org/wiki/Схема_Горнера
5. Legendre A. M. Essai sur la theorie des nombres. Paris, 1798. P. 229.