

В. А. Булычев

Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Россия

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ ШКОЛЬНИКОВ*

Аннотация

Рассматривается использование статистического моделирования для развития информационной и математической культуры школьников. Проводится сравнительный анализ различных инструментов статистического моделирования: электронных таблиц, языков программирования, интерактивных математических сред. Приведены примеры простейших статистических моделей и их реализации с помощью данных инструментов: опыты с монетами и кубиками, случайный выбор без возвращения, испытания Бернулли до появления первого успеха. Выделены наиболее интересные теоретические вопросы, возникающие при проведении статистических экспериментов и доступные для изучения в школьном курсе математики. Рассмотрено несколько игр с вероятностным содержанием, демонстрирующих известные статистические парадоксы. Показано, как накопленные в процессе статистического моделирования навыки могут использоваться для изучения реальных ситуаций и выполнения на этой основе самостоятельных исследований и проектных работ.

Ключевые слова: статистическое моделирование, метод Монте-Карло, случайные числа, случайная выборка, испытания Бернулли, электронная таблица, интерактивная математическая среда, «1С:Математический конструктор».

DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-8-4-11

1. Введение. Кратко о методе статистического моделирования

Метод *статистического моделирования* используется в современной науке как один из основных методов познания. В его основе лежит понятие статистической модели, которая зачастую более адекватна реальной действительности, нежели детерминированная. Это касается, прежде всего, тех процессов и явлений, где решающее действие на поведение системы оказывают всевозможные случайные отклонения и «шумы», например: атмосферные изменения, колебания цен на рынке, статистические ансамбли в физике и т. д.

В типичной детерминированной модели состояние системы описывается функцией, изменение которой под-

чиняется дифференциальному уравнению (чаще всего с частными производными). Изучение такой модели требует хорошей математической подготовки и недоступно большинству школьников. С одной стороны, статистическая модель кажется сложнее детерминированной, поскольку оперирует *случайными функциями* (случайными величинами и процессами). Но, с другой стороны, она позволяет перейти от точных аналитических методов к методу статистических испытаний (так называемому *методу Монте-Карло*), суть которого доступна любому школьнику [10].

Использование метода Монте-Карло может или заменить аналитическое изучение модели (в случаях, когда оно недоступно на учебном уровне), или использоваться параллельно с ним для проверки и подтверждения теоретических результатов.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-29-14217.

Материалы к статье можно скачать на сайте ИНФО: http://infojournal.ru/journals/school/school_08-2020/

Контактная информация

Булычев Владимир Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Россия; *адрес:* 248000, Россия, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2; *e-mail:* bulkalugaru@yandex.ru

V. A. Bulichev,

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Russia

STATISTICAL MODELING AS A TOOL FOR DEVELOPING INFORMATION AND MATHEMATICAL CULTURE OF STUDENTS

Abstract

The use of statistical modeling for the development of information and mathematical culture of schoolchildren is considered in the article. A comparative analysis of various statistical modeling tools: spreadsheets, programming languages, interactive mathematical environments is carried out. Examples of the simplest statistical models and their implementation using these tools are given: experiments with coins and cubes, random selection without returning, Bernoulli tests before the first success. The most interesting theoretical issues that arise during statistical experiments and are available for study in the school mathematics course are highlighted. Several games with probabilistic content are considered, demonstrating well-known statistical paradoxes. It is shown how the skills accumulated in the process of statistical modeling can be used to study real situations and perform independent research and design work on this basis.

Keywords: statistical modeling, Monte Carlo method, random numbers, random sampling, Bernoulli trial, spreadsheet, interactive mathematical environment, 1С:MathKit.

Реализация статистической модели возможна с использованием различных инструментов:

- электронных таблиц [2];
- языков программирования [9];
- интерактивных математических сред [4–6].

Использование разных инструментов моделирования способствует индивидуализации обучения и является основой для повышения информационной культуры учащихся. Ниже мы проиллюстрируем использование перечисленных инструментов на примерах и обсудим их достоинства и недостатки. В качестве электронной таблицы будет рассматриваться MS Excel, языков программирования — C++, Pascal и Python, интерактивной среды — «1С: Математический конструктор» [1].

2. Инструменты для реализации статистической модели

Начнем с простейшего вопроса: **как с помощью метода Монте-Карло смоделировать серию независимых случайных опытов?** В каждом таком опыте мы наблюдаем либо элементарный исход, которым он завершается, либо некоторую случайную величину, которая зависит от этого исхода и имеет определенный закон распределения. Моделирование случайных исходов и величин основано на использовании датчиков случайных (а точнее, *псевдослучайных*) чисел, устройству которых посвящена обширная литература (см., например, [10]).

2.1. Электронная таблица

Для генерации случайных чисел в MS Excel используются две функции:

- СЛЧИС() — вещественное случайное число, равномерно распределенное на отрезке [0; 1];
- СЛУЧМЕЖДУ(М; N) — целое случайное число от М до N.

При каждом обновлении листа эти функции пересчитываются и все случайные числа генерируются заново. Чтобы принудительно обновить лист, достаточно нажать Shift+F9. На рисунке 1 с помощью функции СЛУЧМЕЖДУ смоделирована серия испытаний с монетой (столбец А) и с кубиком (столбец В).

Несколько сложнее смоделировать в MS Excel *бесповторную выборку*. Рассмотрим решение этой проблемы на примере.

Пусть имеется шесть шаров с номерами от 1 до 6, из этих шаров случайно выбирают три шара (без возвраще-

ния). Если трижды вызвать функцию СЛУЧМЕЖДУ(1; 6), то случайные числа с большой вероятностью будут повторяться, что противоречит условиям нашего опыта. Один из возможных вариантов избежать этого состоит в следующем. Сгенерируем с помощью функции СЛЧИС() шесть случайных чисел из отрезка [0; 1], а затем вычислим их ранги с помощью функции РАНГ(). Получаем случайную перестановку из чисел от 1 до 6 (разумеется, различных). Берем из них первые три — бесповторная выборка готова. На рисунке 1 показана серия из десяти таких выборок.

2.2. Языки программирования

Возможности, которыми обладают в области статистического моделирования универсальные языки программирования, такие как Pascal, C++, Python и другие, практически ничем не ограничены. Но на их освоение требуется много усилий и времени.

Ниже показано, как будет выглядеть реализация нашей серии испытаний с монетой, кубиком и шарами на трех наиболее популярных языках программирования. В переменной *a* генерируются результаты опытов с монетой, в *b* — с кубиком, в массиве *c* — бесповторная выборка трех шаров из шести.

Pascal:

```
randomize;
for i:=1 to N do begin
  a:=random(2);
  b:=random(6)+1;
  for j:=1 to 6 do c[j]:=j;
  for j:=1 to 3 do begin
    k:=random(6-j+1) + j;
    x:=c[j]; c[j]:=c[k]; c[k]:=x;
  end;
  writeln(a,b,c[1],c[2],c[3]);
end;
```

C++:

```
srand(time(0));
for(int i=0; i<N; i++) {
  a = rand()%2;
  b = rand()%6 + 1;
  for(int j=0; j<6; j++) c[j] = j+1;
  for(int j=0; j<3; j++) {
    int k = rand()%(6-j) + j;
    int x = c[j];
    c[j] = c[k];
    c[k] = x;
  }
  cout <<a<<b<<c[0]<<c[1]<<c[2]<< endl;
}
```

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Монета	Кубик	Случайные числа из (0;1)						Шар 1	Шар 2	Шар 3
2	0	5	0,5627	0,0356	0,2294	0,0854	0,6386	0,3555	2	5	3
3	1	1	0,1566	0,5193	0,0493	0,6663	0,6921	0,9111	5	4	6
4	1	1	0,2217	0,8794	0,4938	0,031	0,4641	0,4357	5	3	4
5	0	6	0,4613	0,7135	0,5166	0,3371	0,9159	0,823	4	2	3
6	1	1	0,8152	0,0516	0,5151	0,127	0,5119	0,1548	3	6	4
7	0	2	0,8145	0,8934	0,1093	0,4573	0,7853	0,8299	3	2	5
8	0	2	0,2913	0,0894	0,6252	0,4801	0,9031	0,5173	4	5	2
9	1	3	0,4532	0,8212	0,0661	0,2701	0,7913	0,8442	4	3	6
10	0	1	0,0966	0,9245	0,5947	0,5939	0,2338	0,2549	5	2	3
11	1	1	0,3	0,6878	0,754	0,9357	0,3865	0,8192	6	5	4

Рис. 1. Моделирование случайных испытаний в MS Excel

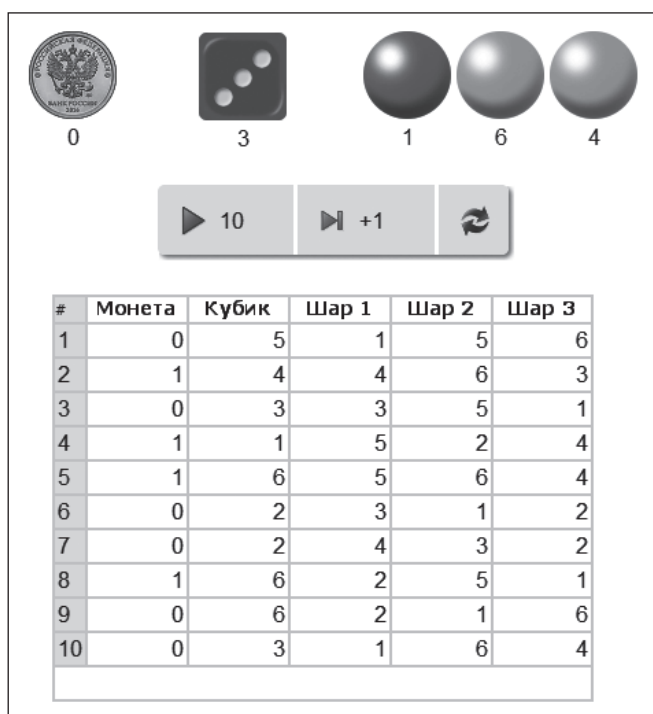


Рис. 2. Моделирование случайных испытаний в «1С:Математическом конструкторе»

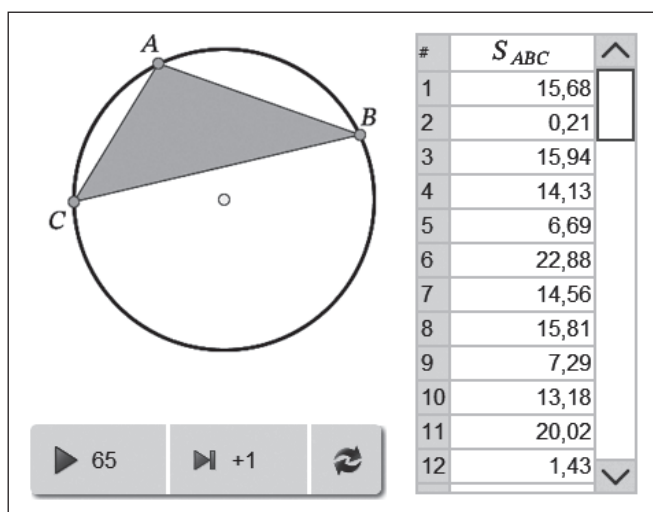


Рис. 3. Опыт со случайными точками в «1С:Математическом конструкторе»

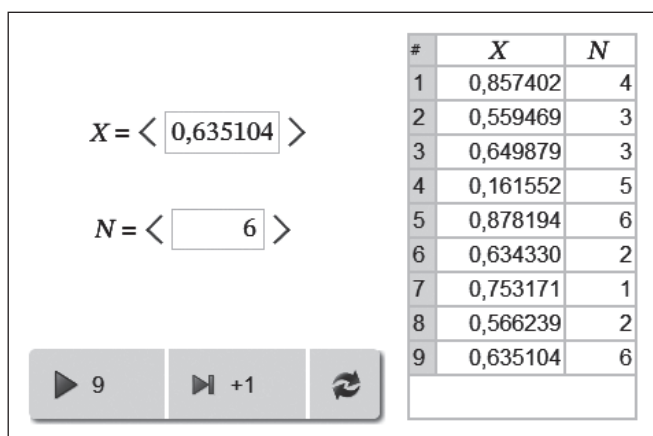


Рис. 4. Случайные параметры в «1С:Математическом конструкторе»

Python:

```
for i in range(N):
    a = random.randint(0, 1)
    b = random.randint(1, 6)
    c = [j for j in range(1,7)]
    random.shuffle(c)
    print(a,b,c[:3])
```

Как видно из приведенных фрагментов, реализации моделей в Pascal и C++ практически не отличаются друг от друга: для получения случайных чисел используются похожие функции `random()` и `rand()`, а для организации бесповторной выборки — так называемый *алгоритм тасования Фишера-Йетса*. В более современном Python для бесповторной выборки вызывается готовая процедура перемешивания `shuffle`. Полные тексты программ можно найти в электронном приложении*. Мы не будем в дальнейшем останавливаться на моделировании с привлечением языков программирования, поскольку этот подход сложнее и требует отдельного рассмотрения.

2.3. Интерактивная математическая среда

В «1С:Математическом конструкторе» основным генератором случая является *плеер случайных испытаний*, который может проводить случайные испытания, двигать случайные точки и изменять случайные параметры. На рисунке 2 показан плеер, который «привязан» к испытаниям с монетой, кубиком и к случайному выбору трех шаров из шести. При этом результат каждого испытания может автоматически сохраняться в таблице. Заметим, что никаких сложностей в организации бесповторной выборки здесь уже нет: достаточно указать это требование в свойствах самого испытания.

Поскольку в основе «1С:Математического конструктора» лежат идеи *динамической геометрии*, еще один интересный тип вероятностных моделей основан на понятии *случайной точки*. Случайный плеер может проводить случайные опыты с точками, имеющими равномерное распределение в заданных областях или на заданных кривых. На рисунке 3 показан опыт со случайным выбором трех точек на окружности. При этом мы можем рассматривать любые фигуры, связанные с исходными случайными точками, и вычислять любые функции от них. Так, в опыте, представленном на рисунке 3, строится треугольник с вершинами в случайных точках, а затем вычисляется его площадь. Результат каждого опыта автоматически заносится в таблицу.

Наконец, подключив случайный плеер к параметру, мы будем иметь полный аналог функций `СЛЧИС()` и `СЛУЧМЕЖДУ()` из пакета MS Excel. При этом тип случайных чисел (целое или вещественное) и их диапазон будут автоматически определяться из свойств параметра. На рисунке 4 мы видим два параметра: вещественный X с диапазоном от 0 до 1 и целочисленный N от 1 до 6. Результаты их случайного изменения видны в таблице.

Таким образом, на этапе описания и разработки математической модели случайного эксперимента «1С:Математический конструктор» имеет перед другими инструментами ряд преимуществ:

- простой интерфейс для описания условий опыта;
- визуализация эксперимента;
- встроенные опыты с геометрическими объектами.

* Электронное приложение можно скачать на сайте ИНФО: http://infojournal.ru/journals/school/school_08-2020/

3. Изучение и анализ статистических моделей

Теперь перейдем к более содержательным примерам, в которых помимо построения вероятностной модели будет проводиться ее *изучение и анализ*.

Пример 1. Частота и вероятность.

Основой всех применений теории вероятностей к реальным задачам служит, как известно, *закон больших чисел*, который в простейшей формулировке гласит: частота события при неограниченном увеличении числа опытов приближается к его вероятности. Покажем, как убедиться в этом с помощью построенных выше моделей.

Дополним нашу Excel-таблицу, в которой моделировался опыт с подбрасыванием монеты, несколькими столбцами (рис. 5):

A — порядковый номер испытания;

B — исход испытания, разыгранный с помощью СЛУЧМЕЖДУ(0; 1) (0 — орел, 1 — решка);

C — общее количество решек, полученных к текущему испытанию;

D — частота решек.

	A	B	C	D
1	№ опыта	Монета	Число решек	Частота
2	1	1	1	1
3	2	0	1	0,5
4	3	1	2	0,666667
5	4	0	2	0,5
6	5	0	2	0,4

Рис. 5. Вычисление частоты в MS Excel

Для столбца C можно использовать функцию СЧЁТЕСЛИ() или СУММ(), а для вычисления D_N достаточно найти отношение C_N/A_N . График зависимости частоты D_N от числа испытаний N наглядно демонстри-

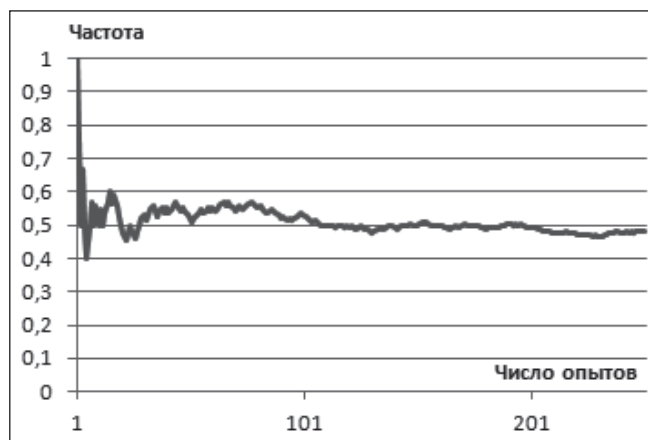


Рис. 6. График изменения частоты в MS Excel

рует действие закона больших чисел: на рисунке 6 такой график построен для 250 испытаний. Заметим, что действие закона становится особенно очевидным, если наблюдать приближение частоты к вероятности *в динамике*, непосредственно во время проведения серии опытов. К сожалению, наша модель не позволяет этого увидеть: все, что мы можем сделать, — это нажать Shift+F9, чтобы обновить лист и получить новую серию из 250 испытаний.

А вот если построить аналогичную модель в «1С:Математическом конструкторе», то такая динамика станет доступной: при запуске плеера случайных испытаний мы увидим на экране анимацию, в которой график изменения частоты события начнет меняться, приближаясь к его вероятности.

Динамическая модель в «1С:Математическом конструкторе» обладает и еще одним преимуществом — она позволяет провести более тонкий анализ сходимости: убедиться, что отклонение частоты от вероятности обратно пропорционально квадратному корню из числа испытаний (см., например, модель «Частота и вероятность» [8] — рис. 7).

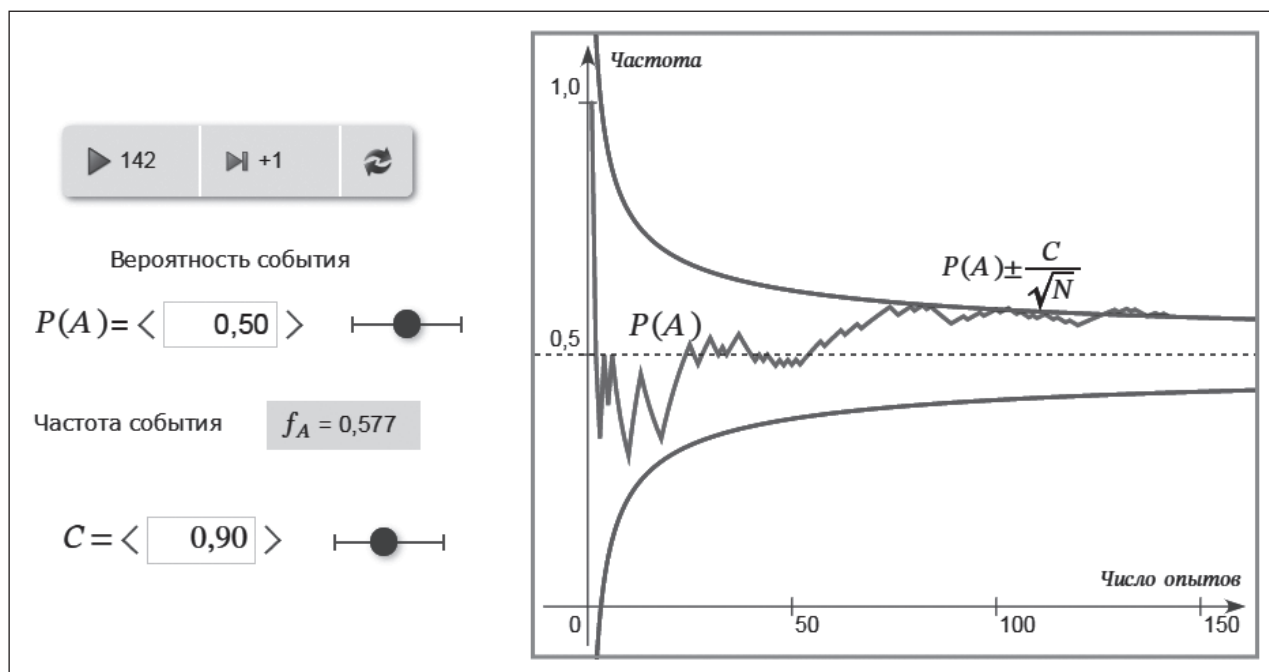


Рис. 7. Динамические графики в «1С:Математическом конструкторе»

Пример 2. До первого успеха.

Многие серьезные применения теории вероятностей в экономике связаны с понятием *марковского момента остановки*. Такие моменты возникают всякий раз, когда мы наблюдаем в реальном времени какой-то случайный процесс (например, торги акциями на бирже) и должны принять решение о его оптимальной «остановке» (например, о продаже или покупке акций). Чтобы моделировать такие процессы, нам нужно научиться проводить испытания не заданное число раз, а *до выполнения некоторого условия* (как в программировании — использовать не цикл *for*, а цикл *while*).

К сожалению, MS Excel не обладает готовыми возможностями такого рода, и, кажется, здесь без программирования на VBA не обойтись, но имеется обходной путь. Поясним его на примере простейшей задачи, связанной с остановкой процесса: мы должны *бросать монету до появления первой решки*. В качестве результата требуется получить среднее число бросаний в этом опыте. Таким образом, нам нужно провести много таких серий, найти для каждой серии ее длину и вычислить среднее арифметическое этих длин.

Чтобы обойтись без программирования, используем маленькую хитрость: рассмотрим одну длинную серию испытаний с монетой и «выделим» в ней все участки, завершающиеся решкой (многие из них будут состоять всего из одного испытания). Так, например, в серии 001101 имеется три таких участка с длинами 3, 1 и 2, вот они: 001, 1, 01. На рисунке 8 можно увидеть, как стандартными средствами MS Excel «разбить» одну сплошную серию испытаний на такие участки:

А — функция СЛУЧМЕЖДУ(0; 1) (0 — орел, 1 — решка);

В — число орлов, полученных подряд к текущему испытанию (0, если в текущем испытании выпала решка);

С — длина серии из орлов, закончившаяся решкой (пустая ячейка, если серия еще не закончилась);

Д — средняя длина серии до первой решки на данный момент.

	А	В	С	Д
1	Монета	Число 0 подряд	Длина	Средняя длина
2	1	0	1	1
3	1	0	1	1
4	0	1		1
5	0	2		1
6	1	0	3	1,666666667
7	0	1		1,666666667
8	0	2		1,666666667
9	1	0	3	2
10	0	1		2
11	1	0	2	2

Рис. 8. Серии до первой решки

В столбце В использована функция ЕСЛИ($A_N=1$; 0; $B_{N-1}+1$), а в столбце С — ЕСЛИ($A_N=0$; ""; $B_{N-1}+1$). Для вычисления средней длины в столбце Д теперь достаточно использовать статистическую функцию СРЗНАЧ(). График изменения средней длины серии до первой решки от числа проведенных опытов показан на рисунке 9: средняя длина приближается к 2. Об этом же говорит и теория.

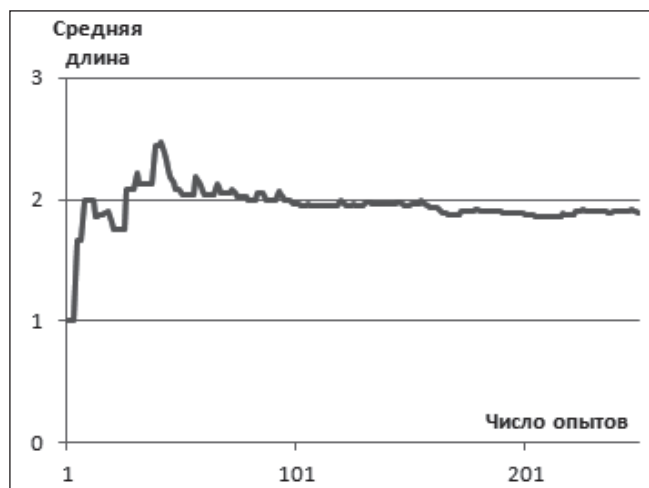


Рис. 9. Средняя длина серии

Рассмотренную модель легко обобщить на случай произвольной последовательности *испытаний Бернулли* до первого успеха: достаточно ввести в рассмотрение параметр p — вероятность успеха и разыгрывать результат испытания по формуле: ЕСЛИ(СЛЧИС() $<p$; 1; 0). Тогда единицы будут появляться уже не с вероятностью $1/2$, а с вероятностью p (см. электронное приложение).

В «1С:Математическом конструкторе» аналогичная модель строится проще. Это объясняется тем, что в настройках плеера случайных испытаний есть два способа завершить серию:

- при достижении заданного количества испытаний (аналог цикла *for*);
- при выполнении некоторого условия (аналог цикла *while*).

Инструментарий «1С:Математического конструктора» позволяет не только найти среднее значение случайной величины, но и построить ее *закон распределения*. В модели «До первого успеха» [8] такой закон строится при изучении числа испытаний до появления на кубике первой шестерки (рис. 10).

Пример 3. Вероятностные игры.

Идеи, использованные в предыдущей модели, могут стать основой для самостоятельного построения вероятностных игр, в которых поиск оптимальной стратегии основан на расчете шансов. Вот один из таких примеров.

Два человека подбрасывают монету до появления подряд двух заданных исходов, причем эти два исхода у каждого игрока свои. Например, первый игрок поставил на 00, а второй — на 10 (напомним, что 0 — это орел, 1 — решка). Тот, чьи два исхода появятся раньше, выигрывает. На какую пару лучше ставить? Вроде бы все равно — ведь шансы 00 и 10 одинаковые и равны, как известно, $1/4$. Но не будем торопиться с выводами, а лучше смоделируем такую игру.

Используем для этого идею из примера 2: будем проводить одну серию испытаний с монетой, но «пережем» ее на серии, которые заканчиваются комбинацией 00 или 10. Начало такой таблицы показано на рисунке 11. Для получения объективной картины лучше провести несколько сотен испытаний. На столбчатой диаграмме прекрасно видно, что после 500 испытаний

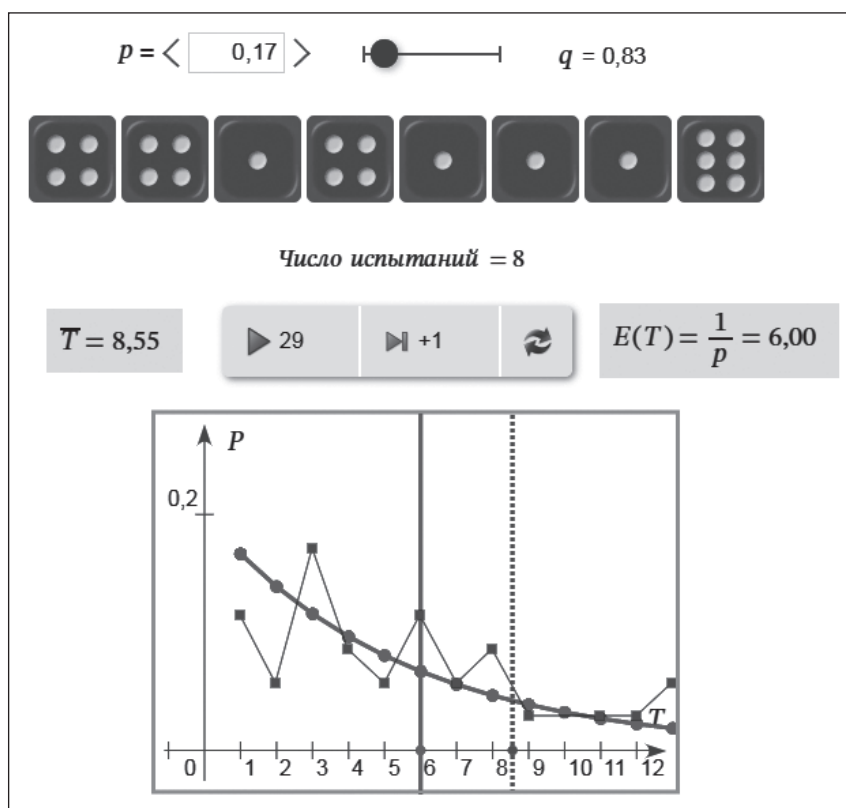


Рис. 10. Закон распределения в «1С:Математическом конструкторе»

комбинация 10 выигрывала примерно в три раза чаще. Может быть, это случайность? Нажмем Shift+F9 — картина почти не изменится.

А теперь попробуем изменить стратегию второго игрока — вместо 10 поставим на 01. Удивительно, но теперь шансы практически выровнялись! Более того, если несколько раз обновить лист, то будет видно, что лидерство будет меняться, а частота выигрышей оставаться примерно одинаковой. Прекрасный повод, чтобы задуматься и объяснить найденный парадокс.

В электронном приложении смоделирована еще более замечательная игра, в которой каждый игрок делает ставку уже на три исхода. Оказывается, что теперь, какую бы тройку исходов ни выбрал первый игрок, у второго всегда найдется вариант еще лучше, который будет выигрывать чаще! Это прекрасная иллюстрация

так называемого *парадокса нетранзитивности (парадокса Кондорсе)*. В электронном приложении содержится модель еще одной интересной игры, известной как *парадокс Монти Холла*.

В «1С:Математическом конструкторе» описанные игры выглядят привлекательнее: в них можно действительно сначала поиграть с компьютером в качестве партнера, а уже потом провести анализ и поискать оптимальную стратегию (рис. 12).

Пример 4. Проектные задания.

В последнем примере мы коснемся моделей, которые могут стать основой проектных заданий в силу их практической значимости и сложности поставленных в них проблем, допускающих как теоретические, так и экспериментальные методы решения.

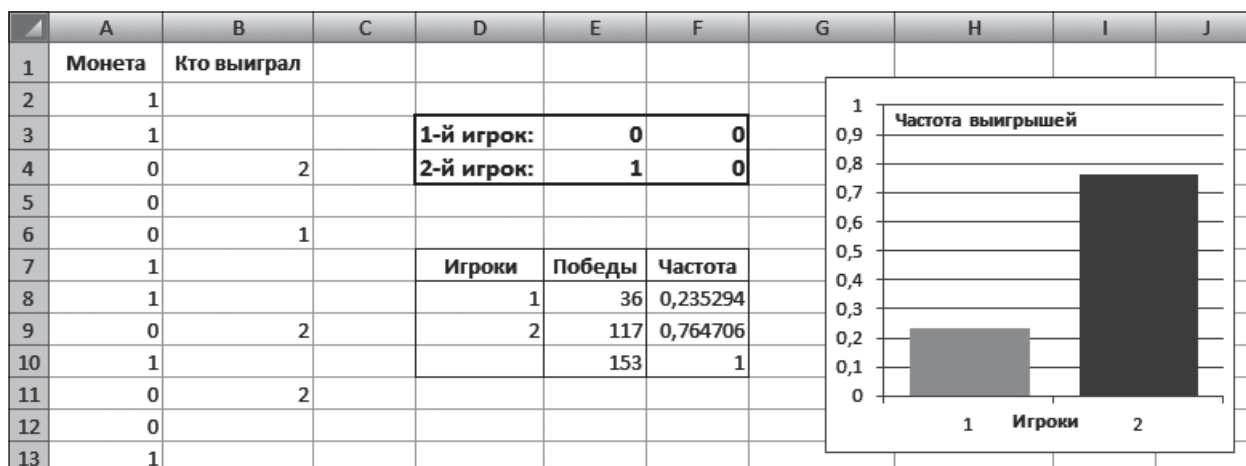


Рис. 11. Игра с монетой до двух исходов

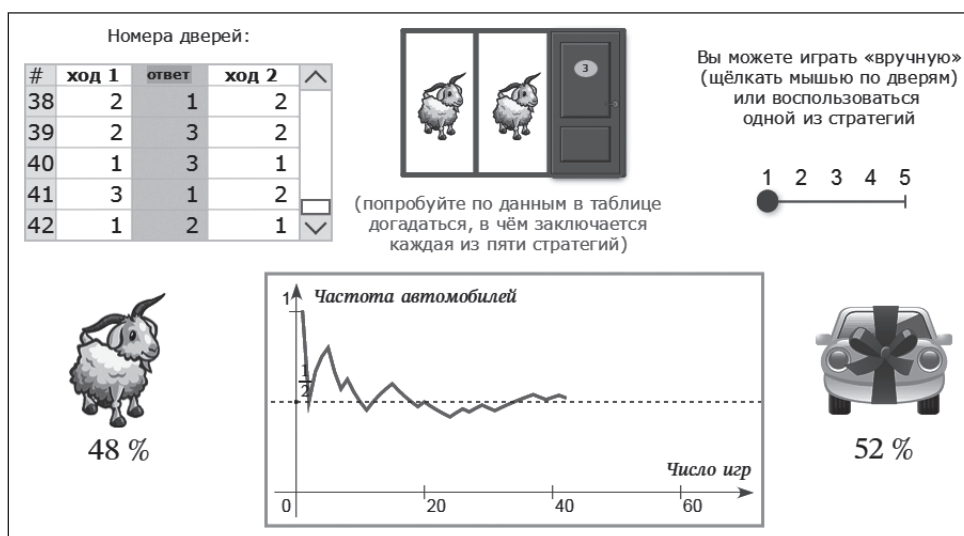


Рис. 12. Игра «Две козы и автомобиль», или парадокс Монти Холла

В [4] уже делался краткий обзор таких заданий, которые можно выполнить с использованием «1С:Математического конструктора». Мы покажем на одном примере, как такая модель может быть реализована в MS Excel.

Представим себе, что на борту воздушного судна, вместимость которого составляет 150 мест, пассажирам предлагаются два вида обедов: с курицей и с рыбой. Накопленная ранее статистика позволяет утверждать,

что вероятность выбора курицы равна p , а вероятность выбора рыбы $q = 1 - p$. На борту лайнера запасено A обедов с курицей и B обедов с рыбой. Какое среднее число недовольных пассажиров следует ожидать? С какой вероятностью все пассажиры получают свой заказ? Сколько обедов нужно запасти, чтобы с вероятностью 0,99 все пассажиры остались довольны? Этот ряд вопросов можно продолжать, усложняя при этом саму модель (например, рассматривая уже не два, а три вида обедов).

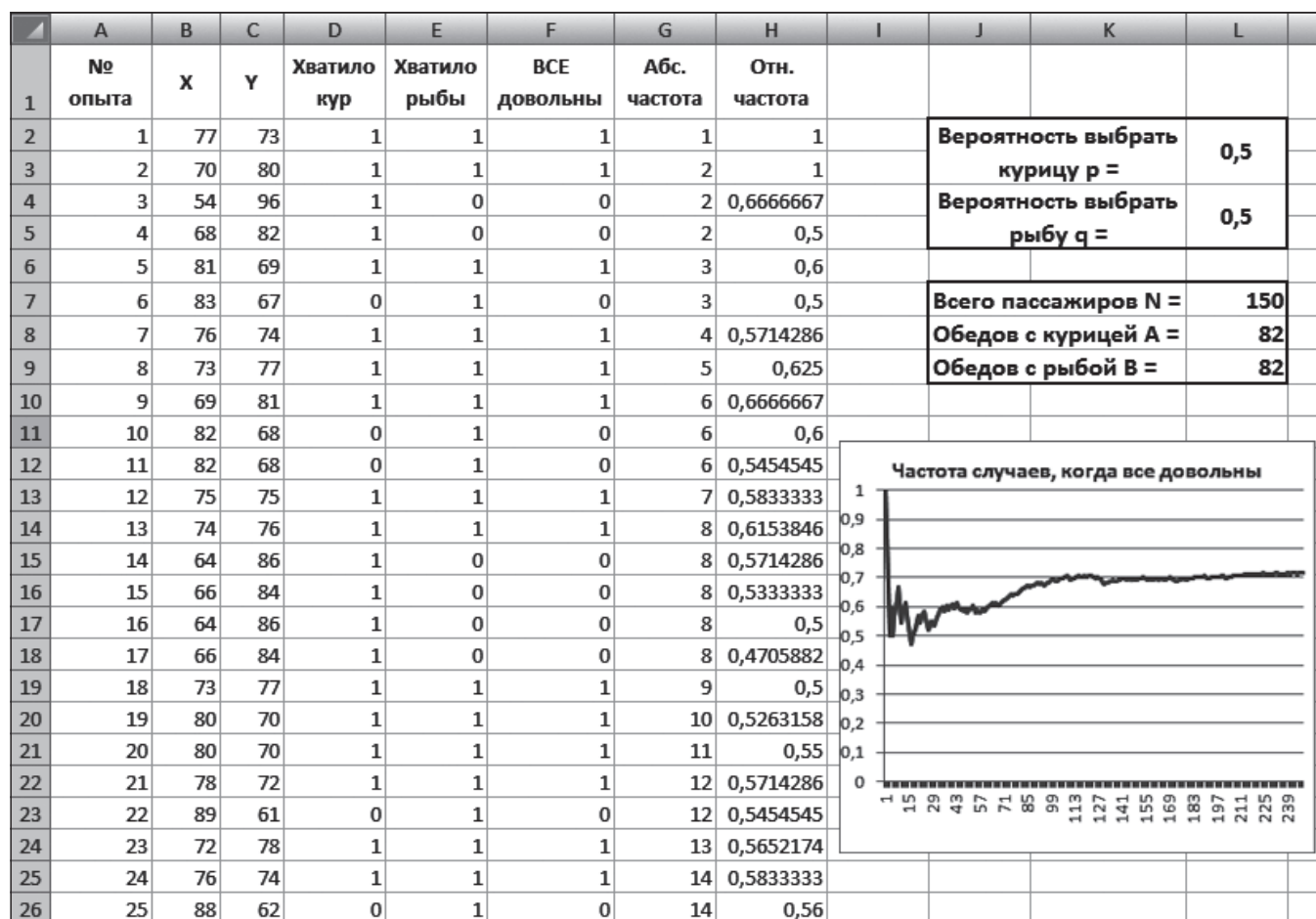


Рис. 13. Задача про обеды на борту авиалайнера

Задача интересна тем, что, во-первых, описывает жизненную ситуацию, с которой сталкивалось большинство учащихся, а во-вторых, ее полное теоретическое решение слишком сложно и большинству из учеников недоступно, в то время как экспериментальное исследование модели не представляет, как мы сейчас увидим, больших трудностей.

На рисунке 13 мы видим часть таблицы с результатами серии испытаний, в каждом из которых разыгрываются случайные величины X (количество выбравших курицу) и $Y = 150 - X$ (количество выбравших рыбу), имеющие *биномиальное распределение*, и вычисляется индикатор события «Все пассажиры довольны». Это позволяет найти частоту данного события, определить предельную вероятность и исследовать вопрос о ее поведении при изменении параметров A и B . Полную таблицу можно найти в электронном приложении. (Мы не останавливаемся здесь на ее более подробном разборе, так как планируем посвятить проектным заданиям отдельную статью.)

4. Выводы

Проведенное сравнение различных инструментов статистического моделирования и рассмотренные примеры позволяют, на наш взгляд, сделать следующие выводы.

Разработка и исследование математических моделей различных явлений со случайными исходами могут одинаково успешно проводиться с использованием:

- электронных таблиц (MS Excel);
- универсальных языков программирования (Pascal, C++, Python);
- интерактивной математической среды («1С:Математический конструктор»).

Выбор конкретного инструмента зависит от подготовки учащихся и вкусов учителя. При этом каждый из перечисленных подходов имеет свои преимущества и недостатки. Так, использование электронных таблиц удобно при обработке полученных статистических результатов, но создает некоторые трудности при моделировании самого процесса проведения случайных испытаний как в плане его визуализации, так и из-за невозможности динамического изменения модели во времени. Эти недостатки отсутствуют в интерактивной математической среде, которая по своей сути нацелена на максимальную интерактивность и динамику. Но при этом в ней нет таких развитых средств обработки данных, как в MS Excel, имеющем сотни встроенных функций, включая статистические. Наконец, наибольшие возможности по разработке и исследованию моделей дает любой универсальный язык программирования, но для их реализации требуются высокий уровень предварительной подготовки учащихся и максимальное время разработки.

В заключение отметим, что уже накопленный опыт преподавания элементов математического моделирования в вузе [2, 6] и школе [3, 7, 11] показывает, что разработка и изучение статистических моделей с использованием любого из рассмотренных инструментов:

- способствуют повышению математической и информационной культуры учащихся;
- позволяют глубже усвоить курс теории вероятностей;
- развивают практические навыки создания информационных моделей окружающих нас процессов и явлений.

Список использованных источников

1. «1С:Математический конструктор» — программная среда для создания интерактивных математических моделей. <http://obr.lc.ru/mathkit>
2. Астанина О. А., Князева Е. В. Вероятностные модели в гуманитарных науках: начальные положения практического курса // Информатика и образование. 2015. № 5. С. 88–92.
3. Булычев В. А. «1С:Математический конструктор» и виртуальные лаборатории по математике в Московской электронной школе // Новые информационные технологии в образовании. Сборник научных трудов 20-й международной научно-практической конференции. Ч. 2. М.: 1С-Паблишинг, 2020. С. 212–216. <https://educonf.lc.ru/conf2020/Том2.pdf>
4. Булычев В. А. Случайный эксперимент и его реализация в «1С:Математический конструктор 6.0» // Информатика и образование. 2014. № 3. С. 45–47. http://infojournal.ru/wp-content/uploads/journals/2014/ИНФО_03_2014.pdf
5. Булычев В. А., Булычева О. Г. «1С:Математический конструктор 8.0» и новая коллекция Web-ресурсов по вероятности // Новые информационные технологии в образовании. Сборник научных трудов 19-й международной научно-практической конференции. Ч. 2. М.: 1С-Паблишинг, 2019. С. 469–472. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36858344>
6. Булычев В. А., Булычева О. Г. Динамическая статистика в среде «1С:Математический конструктор» // Электронный журнал: наука, техника и образование. 2017. № 4 (16). <http://nto-journal.ru/catalog/inzhenerное-obrazovanie/514/>
7. Дубровский В. Н. «1С:Математический конструктор» как инструмент математического моделирования // Новые информационные технологии в образовании. Сборник научных трудов 20-й международной научно-практической конференции. Ч. 2. М.: 1С-Паблишинг, 2020. С. 217–220. <https://educonf.lc.ru/conf2020/Том2.pdf>
8. Лаборатория «Теория вероятностей» на основе динамической программной среды «1С:Математический конструктор». https://obr.lc.ru/mathkit/virtlab/files/laboratory_probability.html
9. Программирование и научные вычисления на языке Python/§18. https://ru.wikiversity.org/wiki/Программирование_и_научные_вычисления_на_языке_Python/§18
10. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1968. 64 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 46.)
11. Чернецкая Т. А. Реализация межпредметных связей математики, физики и информатики на основе использования в учебном процессе конструктивных творческих сред // Информатика и образование. 2013. № 2. С. 79–83. http://infojournal.ru/wp-content/uploads/journals/2013/ИНФО_02_2013.pdf