

А. Л. Королев

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск, Россия

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ И VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS

Аннотация

В статье рассматриваются некоторые методы нахождения корней нелинейных уравнений, которые определяются численно с помощью построения электронной таблицы в Microsoft Excel и приложения в среде Visual Basic for Applications. Используются самые простые методы: метод бинарного деления и метод хорд. Представлены построение электронных таблиц, алгоритм, способ построения приложения VBA и текст соответствующей процедуры. Материал статьи можно использовать в курсах информатики как в школе, так и в вузе для развития междисциплинарных связей информатики и математики и расширения представлений о возможностях электронных таблиц. Представленные в статье задачи успешно решались учениками десятых классов (профиль «Математика. Информатика») и студентами первого курса педвуза по направлениям (профилям) «Физика. Математика», «Физика. Информатика». В публикации отражен личный опыт автора в преподавании учебного курса «Информатика» в Южно-Уральском государственном гуманитарно-педагогическом университете и в средней школе.

Ключевые слова: численный метод, решение уравнений, VBA, междисциплинарные связи.

DOI: 10.32517/2221-1993-2020-19-6-51-57

1. Введение

Общеизвестно, что слово «computer» в точном переводе с английского означает «вычислитель». Поэтому применение компьютера для вычислений — его прямое и первоначальное назначение. «Искусство решения задач на вычислительных машинах интересно и само по себе, оно может помочь во многих ситуациях сильно увеличить ценность вычислений» [10]. Можно привести и еще одно важное высказывание Р. В. Хемминга, известного американского ученого-математика, руководителя математической службы компании «Bell Telephone Laboratories»: «Цель расчетов — понимание, а не числа» [10].

2. Актуальность проблемы

Формирование культуры вычислений в рамках учебного курса «Информатика» важно само по себе, но также оно способствует развитию междисциплинарных связей и, по

нашему мнению, весьма актуально в настоящее время в школьном образовании. Практика применения компьютеров, например в инженерном деле, показывает, что вычисления являются одним из приоритетных направлений в деятельности современного инженера. Впрочем, это относится и к деятельности специалистов во многих других областях. Поэтому очевидна необходимость формирования культуры вычислений, компьютерного математического моделирования в рамках школьного образования, в том числе как средства развития междисциплинарных связей, в частности связей между курсами информатики и математики.

В качестве задач в данной статье выбраны простые вычислительные задачи, понятные учащимся профильных классов с профилем обучения «Математика. Информатика». Это задачи, которые можно решать в среде электронных таблиц Microsoft Excel, а также средствами языка программирования Visual Basic for Applications (VBA), встроенного в Microsoft Office. То есть данные

Контактная информация

Королев Александр Леонидович, канд. тех. наук, доцент, доцент кафедры информатики, информационных технологий и методики обучения информатике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск, Россия; *адрес:* 454080, Россия, г. Челябинск, пр-т Ленина, д. 69; *e-mail:* koroleval@cspsu.ru

A. L. Korolev

South Ural State University of Humanities and Education, Chelyabinsk, Russia

NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS IN ELECTRONIC TABLES AND VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS

Abstract

The article discusses some methods for numerically finding the roots of nonlinear equations, which are determined by numerical methods using the construction of a spreadsheet Microsoft Excel and an application in the Visual Basic for Applications environment. The simplest methods are used: the binary division method and the chord method. The article presents the construction of spreadsheets, the algorithm, the method of creation the VBA application, and the text of the corresponding procedures. The material of the article can be used in informatics courses, both at school and at university, for the development of interdisciplinary connections between informatics and mathematics and expanding ideas about the possibilities of spreadsheets. The problems presented in the article were successfully solved by 10th grade students (profile "Mathematics. Informatics") and first-year students of pedagogical university of the profiles "Physics. Mathematics", "Physics. Informatics". The article reflects the author's personal experience of teaching the course "Informatics" at South Ural State University of Humanities and Education and at school.

Keywords: numerical method, solution of equations, VBA, interdisciplinary connections.

задачи могут использоваться при изучении собственно программирования [8, 9].

Несмотря на существование таких мощных математических пакетов, как MathCAD [6] и MATLAB [7], позволяющих выполнять вычисления разной степени сложности, понимание сути вычислительных алгоритмов и математических методов имеет особое значение, так как автоматическое применение этих алгоритмов и методов без понимания их сути может привести к ошибкам. Многие задачи (причем достаточно сложные) можно решить и без использования математических пакетов, к тому же названные программные комплексы еще нужно иметь в своем распоряжении и уметь ими пользоваться.

Если рассматривать задачу решения уравнения с одним неизвестным $f(x) = 0$, то решение такого уравнения заключается в нахождении его корней, т. е. таких значений x , которые обращают уравнение в тождество: $f(k) \equiv 0$, где k — корень уравнения.

В школьном курсе алгебры приводятся аналитические методы решения *линейных* уравнений $px + q = 0$ ($x = -q/p$) и *квадратных* уравнений: $x^2 + px + q = 0$ ($x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$).

Для решения *кубических* уравнений существует формула Джероламо Кардано, а для уравнений *четвертой степени* — метод Лодовико Феррари. Однако практическое применение данных методов весьма затруднительно — оно требует использования комплексных чисел и, следовательно, расширения содержания курса математики. Математик Н. Х. Абель доказал, что для алгебраических уравнений *пятой степени и выше* в общем случае не существует формулы, выражающей решение уравнения через коэффициенты этого уравнения с помощью арифметических операций и извлечения корней.

Следует учесть, что на практике коэффициенты уравнений могут иметь приближенное значение, так что вопрос о точных значениях корней уравнения в этом случае не имеет смысла. Если уравнение является трансцендентным, то аналитическое решение уравнения вообще проблематично. Поэтому *большое значение имеют методы приближенного вычисления корней уравнения $f(x) = 0$* .

Пусть k — корень уравнения, а p — его приближенное значение с точностью ε , т. е. $|k - p| \leq \varepsilon$. Иногда приближенное значение корня определяется при выполнении условия: $|f(p)| \leq \varepsilon$. С нашей точки зрения, последнее условие логично согласуется с определением корня уравнения $f(k) \equiv 0$, так как не для всех численных методов можно проверить условие $|k - p| \leq \varepsilon$, тогда как условие $|f(p)| \leq \varepsilon$ можно проверить практически всегда. Численные методы нахождения корней уравнений в рамках школьного курса информатики рассматриваются, например, в [2, 4, 5], в учебном пособии для студентов обучающихся по специальности педагогического образования «Информатика» [3], и в учебном пособии для будущих ИТ-специалистов [1].

3. Суть вычислительных методов

Рассмотрим несколько методов приближенного определения корней нелинейного уравнения.

Для определения корней **необходимо предварительно выполнить операцию отделения корней**. Суть этой операции состоит в нахождении отрезка $[a; b]$, на

котором находится единственный корень. На этом отрезке функция $f(x)$ меняет свой знак, т. е. $f(a)f(b) < 0$.

Самый простой и наглядный метод отделения корней (по крайней мере, для учащихся) — графический (рис. 1, 2).

Рассмотрим этот метод на примере уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$.

Пусть:

$$y_1 = x^2;$$

$$y_2 = \cos(x);$$

$$f(x) = \cos(x) - x^2.$$

Графики функций y_1 , y_2 , $f(x)$ представлены на рисунках 1 и 2, из которых следует, что корень уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$ расположен на интервале $[0,8; 1]$. Это точка пересечения кривых y_1 , y_2 (рис. 1) или точка пересечения функции $f(x) = \cos(x) - x^2$ с осью X (рис. 2). Графики (рис. 1 и 2) построены в Excel.

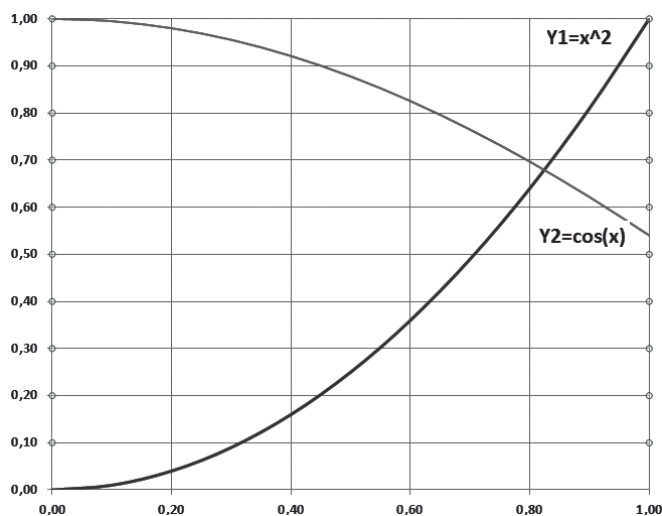


Рис. 1. Графический способ отделения корней

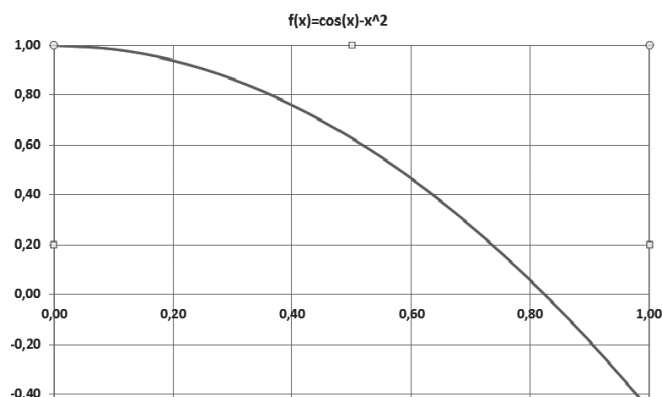


Рис. 2. График функции $f(x) = \cos(x) - x^2$

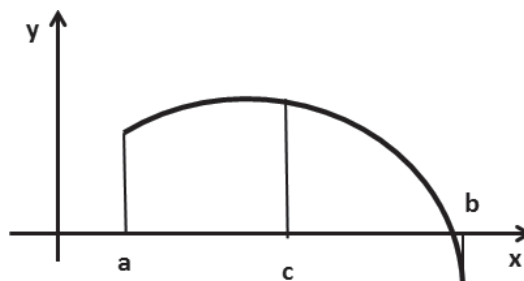


Рис. 3. Иллюстрация бинарного метода

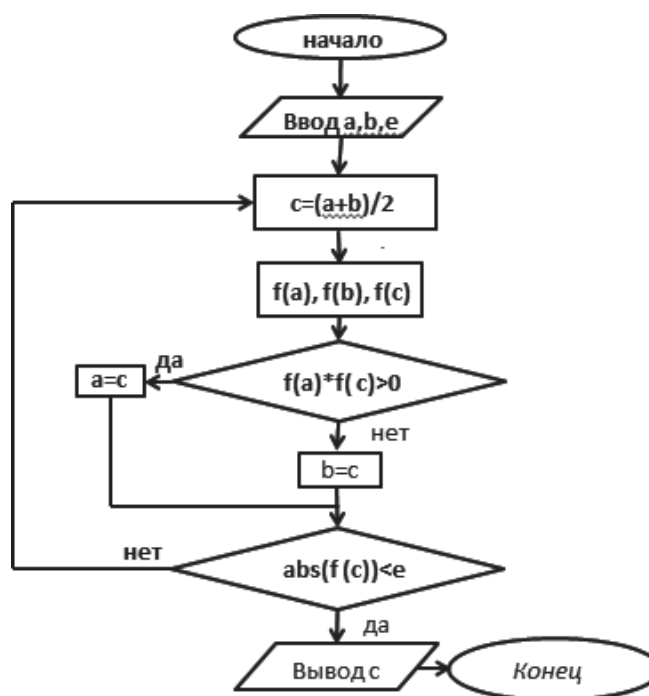


Рис. 4. Блок-схема алгоритма бинарного деления:
 a, b — границы интервала с корнем, e — точность определения корня

Суть **алгоритма бинарного деления** предельно проста: отрезок $[a; b]$ делится пополам, середина отрезка (точка c) имеет координату $c = (a + b) / 2$. Далее рассматривается та часть отрезка, где функция $f(x)$ меняет знак, и аналогичный анализ повторяется (рис. 3) до достижения требуемой точности. Блок-схема алгоритма нахождения корня бинарным делением представлена на рисунке 4.

Данный метод можно легко реализовать в среде электронных таблиц (рис. 5).

Электронная таблица на рисунке 5 построена в соответствии с алгоритмом по рисунку 4 следующим образом:

- в ячейки A2 и B2 вводятся первоначальные значения границ интервала с корнем уравнения: в A2 — 0,8, в B2 — 1,0;

- в ячейку C2 вводится формула: $=(A2+B2)/2$;
- в ячейки D2, E2, F2 вводятся формулы для вычисления значений функции $f(x)$ при соответствующих значениях аргумента:
 - ячейка D2: $=\cos(A2)-A2^2$;
 - ячейка E2: $=\cos(B2)-B2^2$;
 - ячейка F2: $=\cos(C2)-C2^2$;
- в ячейки G2, H2 вводятся произведения значений функции из ячеек D2, E2, F2: в G2 — $=D2*E2$, в H2 — $=E2*F2$;
- в ячейку A3 вводится формула: $=\text{ЕСЛИ}(G2>0; C2; A2)$;
- в ячейку B3 вводится формула: $=\text{ЕСЛИ}(G2>0; C2; B2)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	f(a)*f(c)	f(b)*f(c)
2	0,800000	1,000000	0,900000	0,056707	-0,459698	-0,188390	-0,010683	0,086602
3	0,800000	0,900000	0,850000	0,056707	-0,188390	-0,062517	-0,003545	0,011778
4	0,800000	0,850000	0,825000	0,056707	-0,062517	-0,002068	-0,000117	0,000129
5	0,800000	0,825000	0,812500	0,056707	-0,002068	0,027529	0,001561	-0,000057
6	0,812500	0,825000	0,818750	0,027529	-0,002068	0,012783	0,000352	-0,000026
7	0,818750	0,825000	0,821875	0,012783	-0,002068	0,005371	0,000069	-0,000011
8	0,821875	0,825000	0,823438	0,005371	-0,002068	0,001655	0,000009	-0,000003
9	0,823438	0,825000	0,824219	0,001655	-0,002068	-0,000206	0,000000	0,000000
10	0,823438	0,824219	0,823828	0,001655	-0,000206	0,000725	0,000001	0,000000
11	0,823828	0,824219	0,824023	0,000725	-0,000206	0,000259	0,000000	0,000000
12	0,824023	0,824219	0,824121	0,000259	-0,000206	0,000027	0,000000	0,000000
13	0,824121	0,824219	0,824170	0,000027	-0,000206	-0,000090	0,000000	0,000000
14	0,824121	0,824170	0,824146	0,000027	-0,000090	-0,000031	0,000000	0,000000
15	0,824121	0,824146	0,824133	0,000027	-0,000031	-0,000002	0,000000	0,000000
16	0,824121	0,824133	0,824127	0,000027	-0,000002	0,000012	0,000000	0,000000
17	0,824127	0,824133	0,824130	0,000012	-0,000002	0,000005	0,000000	0,000000
18	0,824130	0,824133	0,824132	0,000005	-0,000002	0,000001	0,000000	0,000000

Рис. 5. Таблица реализации бинарного метода для уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$

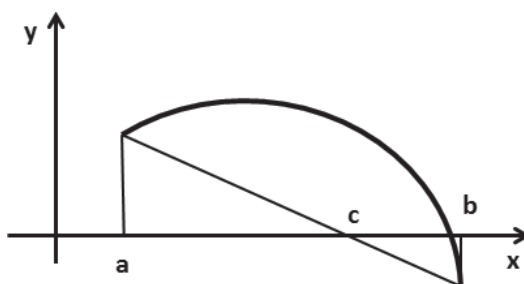


Рис. 6. Иллюстрация метода хорд

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	f(a)*f(c)	f(b)*f(c)
2	0,800000	1,000000	0,821962	0,056707	-0,459698	0,005164	0,000293	-0,002374
3	0,821962	1,000000	0,823940	0,005164	-0,459698	0,000459	0,000002	-0,000211
4	0,823940	1,000000	0,824115	0,000459	-0,459698	0,000041	0,000000	-0,000019
5	0,824115	1,000000	0,824131	0,000041	-0,459698	0,000004	0,000000	-0,000002
6	0,824131	1,000000	0,824132	0,000004	-0,459698	0,000000	0,000000	0,000000
7	0,824132	1,000000	0,824132	0,000000	-0,459698	0,000000	0,000000	0,000000
8	0,824132	1,000000	0,824132	0,000000	-0,459698	0,000000	0,000000	0,000000

Рис. 7. Таблица реализации метода хорд для решения уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$

Из ячеек диапазона C2:H2 формулы копируются в третью строку. После этого вся третья строка электронной таблицы на рисунке 5 (диапазон A3:H3) копируется в другие строки ниже, до тех пор пока не будет выполнено условие: $f(c) \leq 0,000001$. Как следует из этой таблицы, для нахождения корня уравнения $\cos(x) - x^2 = 0$ с точностью 0,000001 потребовалось 16 циклов вычислений.

Далее рассмотрим **метод хорд** (рис. 6).

Электронная таблица для реализации метода хорд (рис. 7) создается аналогично таблице на рисунке 5, только значение c вычисляется по формуле: $c = a - f(a)(b - a) / (f(b) - f(a))$ (ячейка C2: =A2-D2*(B2-A2)/(E2-D2)) как координата точки пересечения хорды с осью X. Все остальные формулы совпадают с таблицей на рисунке 5. Это единственное отличие в таблицах для решения уравнения бинарным методом и методом хорд (рис. 5, 7).

На основе сравнения рисунков 5 и 7 можно анализировать такую характеристику численного метода, как **скорость сходимости**. Действительно, по данным рисунков 5 и 7 видно, что метод бинарного деления дает требуемую точность ($|f(c)| < 0,000001$) за 16 циклов вычислений, а метод хорд дает такую же точность за пять циклов вычислений.

Причем метод бинарного деления дает двустороннюю оценку значения корня $a < c < b$ (рис. 5), длина отрезка $[a; b]$ уменьшается при каждом цикле вычислений, а функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ меняет знак, т. е. корень уравнения всегда находится на $[a; b]$. А при реализации метода хорд длина отрезка $[a; b]$ не уменьшается до малых величин. Таким образом, текущая длина отрезка $[a; b]$ в данном случае не может быть мерой точности определения корня уравнения. В численных методах замечено, что простые в реализации методы требуют много вычислений, но более надежны с точки зрения получения результатов. Мы ограничимся простыми методами, другие методы уточнения корней (метод Ньютона, метод простой итерации), по нашему мнению, на школьном уровне рассматривать нецелесообразно ввиду сложности и особых условий их применения и реализации.

4. Создание VBA-приложения

Решение задач, представленных выше, может быть выполнено в среде электронных таблиц Excel средствами Visual Basic for Applications.

Visual Basic for Applications (VBA) — встроенная в Microsoft Office система программирования, с помощью которой можно создавать законченные и работоспособные программы для расширения возможностей приложений Microsoft Office [8]. Среда VBA, встроенная в Excel, удобна и доступна, позволяет существенно расширить возможности и сферу применения электронных таблиц Excel.

Создадим приложение для численного решения уравнения $f(x) = 0$ **методом бинарного деления** (реализация метода хорд проводится аналогично с учетом формулы $c = a - f(a)(b - a) / (f(b) - f(a))$).

Итак, дано уравнение $f(x) = 0$, задан интервал $[a; b]$, о котором известно, что на этом интервале располагается только один корень, т. е. отделение корня выполнено. Суть метода описана выше.

На рабочем листе создадим таблицу по рисунку 8.

	A	B	C	D
1	a	b	c	f(c)
2	0	1		

Рис. 8. Лист электронной таблицы

Для запуска VBA необходимо перейти на вкладку **Разработчик** (рис. 9). Ниже все рисунки относятся к работе в MS Office 10.

Затем вставим элемент управления «кнопка», используя команду меню **Разработчик, Вставить, Элементы управления формы** (рис. 10).

Кнопка «рисует» мышкой, при этом появится окно (рис. 11).

Щелчок правой кнопкой мыши по «Кнопке 1» позволяет изменить надпись на кнопке (рис. 12).

Используя пункт меню **Разработчик, Visual Basic**, откроем редактор Visual Basic (рис. 13).

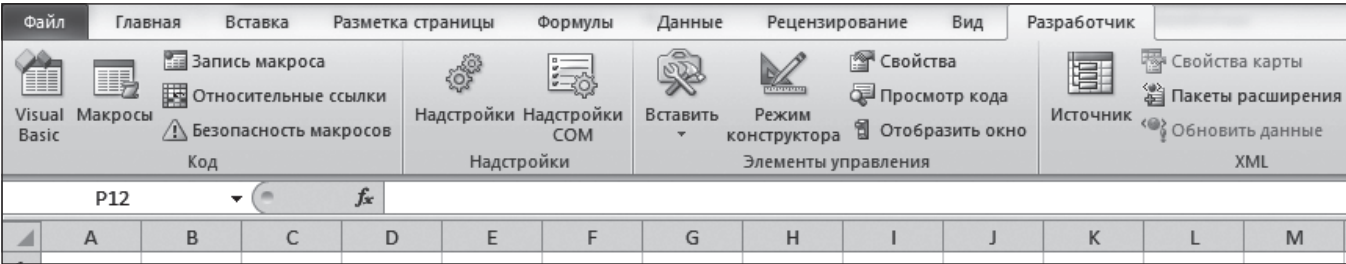


Рис. 9. Вкладка Excel *Разработчик*

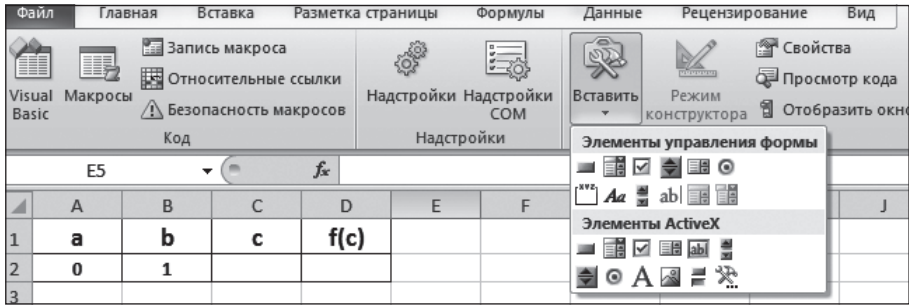


Рис. 10. Создание формы с кнопкой

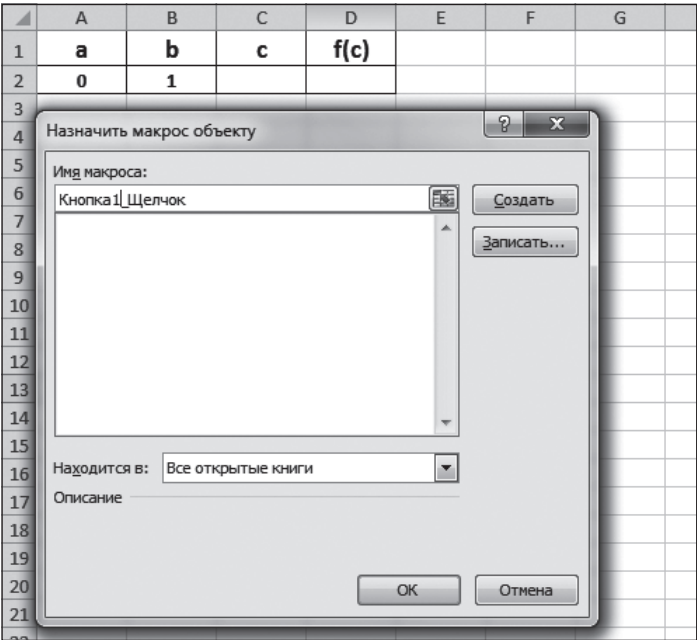


Рис. 11. К размещению кнопки



Рис. 12. Таблица с управляющей кнопкой «Пуск»

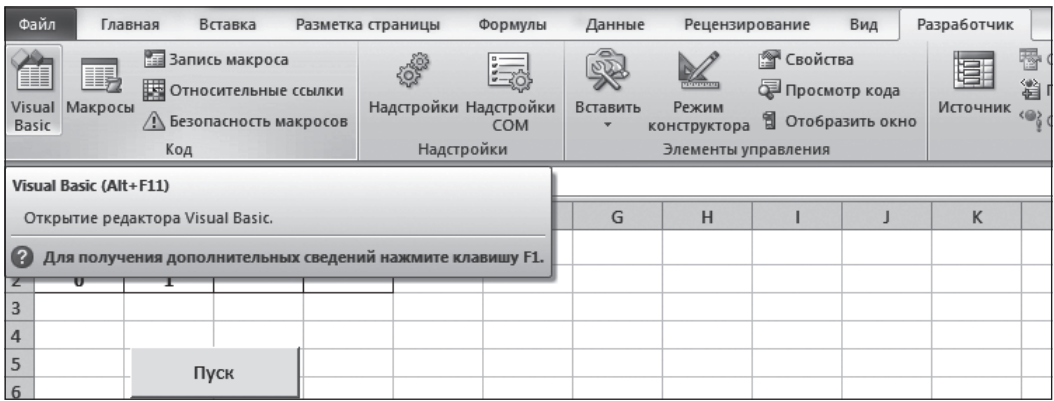


Рис. 13. Запуск редактора Visual Basic

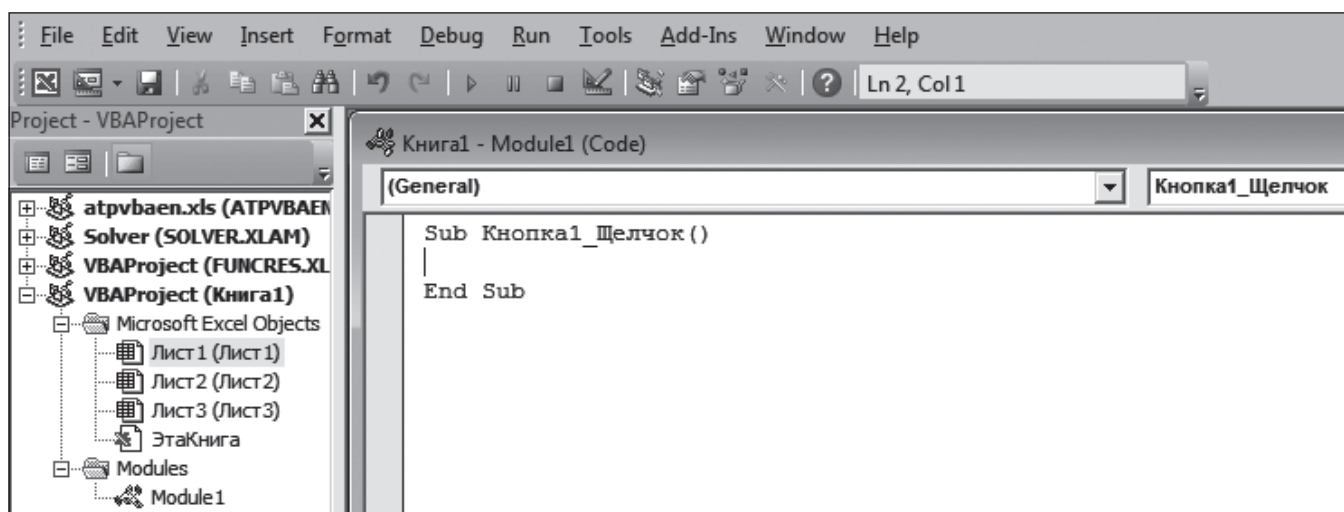


Рис. 14. Заготовка процедуры, связанной с кнопкой

При этом откроется заготовка приложения (рис. 14), которая содержит «пустую» процедуру Sub Кнопка1_Щелчок(). Данная событийная процедура (подпрограмма) выполняется при щелчке на кнопке «Пуск».

Теперь в среде редактора Visual Basic (рис. 14) требуется ввести текст процедуры, который представлен ниже в таблице 1. Нажатие кнопки «Пуск» в процедуре по таблице 1 приведет к выполнению только одного шага в решении задачи определения корня уравнения методом бинарного деления. При многократном нажатии на кнопку можем наблюдать весь процесс приближения к значению корня.

Изменение текста процедуры по таблице 2 позволяет повторять действия до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность определения корня уравнения

$|FN(c)| < 0,0001$, т. е. будет определен результат решения задачи с заданной точностью.

Для реализации метода хорд необходимо изменить только оператор вычисления значения переменной; $c = a - FN(a)(b - a) / (FN(b) - FN(a))$.

5. Выводы

Представленные в статье задачи успешно решались учениками десятых классов (профиль «Математика. Информатика») и студентами первого курса педвуза по направлениям (профилям) «Физика. Математика», «Физика. Информатика» как в среде электронных таблиц, так и в среде VBA. Реализация методов в среде

Таблица 1

Текст процедуры Sub Кнопка1_Щелчок() для реализации одного шага метода бинарного деления

Операторы	Комментарии
Sub Кнопка1_Щелчок()	Заголовок процедуры
a = Cells(2, 1)	Значение из ячейки A2 передается переменной a
b = Cells(2, 2)	Значение из ячейки B2 передается переменной b
c = (a + b) / 2	Вычисляется значение переменной c
If (FN(a) * FN(c) > 0) Then a = c Else b = c End If	Определяются новые границы интервала [a; b] в соответствии с методом бинарного деления
Cells(2, 1) = a	Значение переменной a передается в ячейку A2
Cells(2, 2) = b	Значение переменной b передается в ячейку B2
Cells(2, 3) = c	Значение переменной c передается в ячейку C2
Cells(2, 4) = FN(c)	Значение функции FN(c) передается в ячейку D2
End Sub	Конец процедуры
Function FN(x)	Заголовок функции
FN = cos(x) - x ²	Вычисление значения функции
End Function	Конец функции

Таблица 2

Текст процедуры *Sub Кнопка1_Щелчок()* для реализации решения уравнения методом бинарного деления

Операторы	Комментарии
Sub Кнопка1_Щелчок()	Заголовок процедуры
a = Cells(2, 1)	Значение из ячейки A2 передается переменной <i>a</i>
b = Cells(2, 2)	Значение из ячейки B2 передается переменной <i>b</i>
Do	Начало цикла с постусловием
c = (a + b) / 2	Вычисляется значение переменной <i>c</i>
If (FN(a) * FN(c) > 0) Then a = c Else b = c End If	Определяются новые границы интервала [<i>a</i> ; <i>b</i>] в соответствии с методом бинарного деления
Loop Until abs(FN(c)) < 0,0001	Проверка условия окончания цикла
Cells(2, 2) = b	Значение переменной <i>b</i> передается в ячейку B2
Cells(2, 3) = c	Значение переменной <i>c</i> передается в ячейку C2
Cells(2, 4) = FN(c)	Значение функции <i>FN(c)</i> передается в ячейку D2
End Sub	Конец процедуры
Function FN(x)	Заголовок функции
FN = cos(x) – x ²	Вычисление значения функции
End Function	Конец функции

электронных таблиц дает определенные преимущества, так как можно наблюдать весь ход вычислительного процесса. Кроме того, студенты применяли средства Excel вкладки *Разработчик* для создания макросов, где код VBA создается автоматически.

Список использованных источников

1. *Зенков А. В.* Численные методы: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. 124 с.
2. *Калинин И. А., Самылкина Н. Н.* Информатика. 10 класс. Углубленный уровень: учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 256 с.
3. *Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К.* Численные методы: учебное пособие. М.: Академия, 2004. 384 с.

4. *Поляков К. Ю., Еремин Е. А.* Информатика. 10 класс. Базовый и углубленный уровни: учебник. В 2 ч. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 352 с.
5. Сайт Константина Полякова. <http://kpolyakov.spb.ru/school/ppt.htm>
6. Сайт MathCAD. <https://www.mathcad.com/ru>
7. Сайт MathWorks. <https://www.mathworks.com>
8. Справочник по VBA для Office. <https://docs.microsoft.com/ru-ru/office/vba/api/overview/>
9. *Угринович Н. Д.* Информатика и информационные технологии: учебник для 10–11 классов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 512 с.
10. *Хемминг Р. В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 400 с.

НОВОСТИ

Ведется разработка модуля по информационной безопасности для школьных учителей

«Лаборатория Касперского» и «Яндекс.Учебник» разработают модуль по информационной безопасности, который поможет школьным педагогам освоить навыки, необходимые для обучения детей правилам кибергигиены и этикету общения в сети. Он будет доступен на образовательной платформе «Я Учитель» и войдет в курс «Цифровые компетенции учителя».

«На наш взгляд, вопросу повышения киберграмотности детей сегодня важно уделять больше внимания, ведь их жизнь неразрывно связана с миром технологий.

Следует рассказывать школьникам о базовых аспектах онлайн-безопасности: как обеспечить приватность, как личная информация в интернете влияет на реальную жизнь, что такое методы социальной инженерии, к каким ресурсам относиться настороженно и о многом другом. Мы надеемся, что наш проект поможет педагогам подготовить школьников к безопасной жизни в цифровом мире», — отметил Андрей Сиденко, руководитель направления «Лаборатории Касперского» по детской безопасности в интернете.

(По материалам CNews)