

К. Ю. Поляков,

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет;
школа № 163, Санкт-Петербург

ЗАДАЧИ НА АНАЛИЗ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Аннотация

В статье рассмотрены задачи контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по информатике на анализ логических выражений. Приводятся решения нескольких задач разной сложности с помощью аналитического и графоаналитического методов.

Ключевые слова: информатика, ЕГЭ, КИМ.

DOI: 10.32517/2221-1993-2019-18-9-29-35

1. Введение

По сложившейся традиции задачи на математическую логику — едва ли не самые сложные задачи контрольно-измерительных материалов (КИМ) ЕГЭ по информатике. В настоящей статье речь пойдет про задание 18 в текущей модели КИМ [2].

Вводя новый тип задач, авторы КИМ, к сожалению, не довели до сведения учителей информатики важную информацию о том, 1) какое решение предполагается в этих задачах, 2) каковы ограничения на сложность этих задач, т. е. в каких пределах могут варьироваться реальные задачи ЕГЭ под № 18.

Решение некоторых из известных задач этого типа не представляет сложности и при достаточном навыке может быть найдено устно. Более сложные задачи требуют непростых рассуждений, их аналитическое решение затруднительно. Как отмечалось в [4], в современном варианте КИМ основное содержание задачи 18 относится к математике, а не к информатике. В [1] было замечено, что фактически задачи этого типа часто сводятся к задачам линейного программирования.

Цель данной статьи — обобщить существующие подходы к решению типовых задач КИМ ЕГЭ по информатике на анализ логических выражений (задача № 18). Ниже будут подробно рассмотрены задачи этого типа разной сложности. Для некоторых из них есть простое аналитическое решение, для решения других

более удобен графоаналитический метод. Также приводятся примеры сложных вариантов задач, которые тем не менее решаются на основе математических знаний школьной программы.

Первоначальная версия этой статьи была представлена в [3].

2. Простые задачи

Задача 1.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(2x + y < A) \vee (y > 20) \vee (x > 30)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Решение.

Разделим выражение на две части. Ту часть, которая не зависит от выбора значения A , назовем *постоянной частью*. В данном случае постоянная часть — это выражение:

$$(y > 20) \vee (x > 30).$$

Вторую часть, которая зависит от выбора A , назовем *изменяемой частью*, в данной задаче это выражение:

$$2x + y < A.$$

Если для некоторой пары (x, y) постоянная часть ложна (имеет значение 0), то все выражение истинно тогда

Контактная информация

Поляков Константин Юрьевич, доктор тех. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; адрес: 190121, г. Санкт-Петербург, ул. Лощманская, д. 3; учитель информатики, школа № 163, Санкт-Петербург; адрес: 191015, г. Санкт-Петербург, ул. Кировная, д. 54; e-mail: kpolyakov@mail.ru

K. Yu. Polyakov,
Saint-Petersburg State Marine Technical University;
School 163, Saint-Petersburg

TASKS ON MATHEMATICAL LOGIC IN THE INFORMATICS UNIFIED STATE EXAM

Abstract

The article presents an overview of the tasks on analysis of logical expressions included in test materials for the Unified State Exam on informatics. Solutions to a number of such tasks are given based on analytical and graph-analytical methods.

Keywords: informatics, Unified State Exam, test materials.

и только тогда, когда изменяемая часть истинна. Для этого нужно выбрать значение A так, чтобы при всех рассматриваемых значениях x и y выполнялось условие: $2x + y < A$.

Определим условие, при котором выражение $(y > 20) \vee (x > 30)$ ложно. Выполним инверсию и применив закон де Моргана, получаем: $(y \leq 20) \wedge (x \leq 30)$. Заметим, что оба неравенства нестрогие, поскольку в исходных отношениях были строгие неравенства.

По условию x и y — целые неотрицательные числа, поэтому необходимо добавить еще два условия: $(0 \leq y) \wedge (0 \leq x)$. В итоге получаем:

$$(0 \leq x \leq 30) \wedge (0 \leq y \leq 20).$$

Такую область, в которой постоянная часть заданного выражения ложна, будем называть *особой областью*. Для данной задачи особая область может быть изображена в виде прямоугольника, включающего границы (рис. 1).

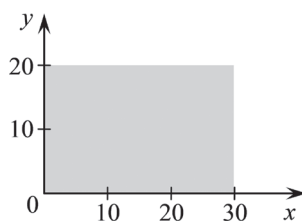


Рис. 1

Нам нужно выбрать минимальное значение A , при котором изменяемая часть истинна для всех точек с целочисленными координатами в особой области. Иначе говоря, для любой точки особой области должно выполняться условие: $x + 2y < A$. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы указанное условие выполнялось для *критической точки* K , для которой значение выражения $2x + y$ максимально. Таким образом, нужно найти

$$\max(2x + y)$$

на множестве всех целочисленных пар (x, y) , удовлетворяющих ограничениям:

$$(0 \leq x \leq 30) \wedge (0 \leq y \leq 20).$$

Эта задача представляет собой простейшую задачу (целочисленного) линейного программирования: найти максимум линейной функции при линейных ограничениях.

К счастью, эта конкретная задача имеет простое решение. Очевидно, что ограничения никак не связывают значения x и y , и в пределах прямоугольника на рисунке 1 каждая из координат может изменяться независимо от другой. Поэтому максимум достигается при независимом выборе максимальных значений:

$$\max(2x + y) = 2x_{\max} + y_{\max} = 2 \cdot 30 + 20 = 80.$$

Таким образом, изменяемая часть сводится к неравенству $A > 80$, что дает $A_{\min} = 81$.

Это решение имеет графическую интерпретацию. Неравенство $2x + y < A$ в изменяемой части может быть переписано в виде:

$$y < -2x + A.$$

Это условие должно выполняться для всех точек особой области на рисунке 1, т. е. все точки прямоугольника должны находиться ниже прямой $y = -2x + A$. Изменяя значение A , мы можем сдвигать эту прямую

по вертикали. При некотором значении A она коснется прямоугольника (рис. 2). Далее эту точку касания, определяющую оптимальное (наименьшее или наибольшее) значение A , будем называть *критической точкой*.

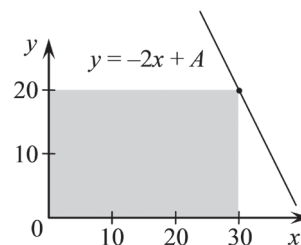


Рис. 2

Для заданного наклона прямой (-2) критическая точка имеет координаты $(30, 20)$. Подставив эти координаты в выражение для изменяемой части, определим условие, которому должно удовлетворять значение A :

$$20 < -2 \cdot 30 + A \Rightarrow A > 80.$$

Следовательно, $A_{\min} = 81$.

Заметим, что при других условиях касание может произойти в любом из углов прямоугольника. Например, если изменяемая часть заданного выражения имеет вид: $-2x + y < A$ (изменен знак у первого слагаемого в левой части), касание произойдет в точке $(0, 20)$, что дает:

$$A > -2 \cdot 0 + 20 = 20 \Rightarrow A_{\min} = 21.$$

Этот случай изображен на рисунке 3.

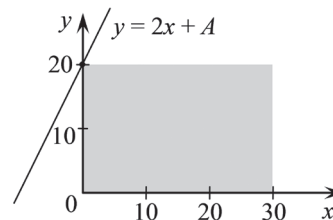


Рис. 3

Аналитическое решение тоже не представляет сложности. Задача линейного программирования сводится к отысканию $\max(-2x + y)$ среди всех целочисленных пар (x, y) в пределах особой области. Поскольку x и y изменяются независимо друг от друга (выбор значения x не влияет на диапазон изменения y , и наоборот), этот максимум достигается при минимальном значении x (оно равно 0) и максимальном значении y (оно равно 20). Получаем:

$$A > -2 \cdot x_{\min} + y_{\max} = -2 \cdot 0 + 20 = 20 \Rightarrow A_{\min} = 21.$$

Задача 2.

Для какого **наибольшего** целого числа A выражение $(2x + y > A) \vee (y > 20) \vee (x > 30)$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Решение.

В отличие от задачи 1, в изменяемой части поменялся знак отношения (теперь использован знак $>$ вместо $<$), и требуется найти наибольшее, а не наименьшее допустимое значение A .

Найдем решение аналитически. Изменяемая часть имеет вид: $2x + y > A$. Поэтому нужно выбирать A так,

чтобы $A < \min(2x + y)$ для всех пар (x, y) в пределах особой области, выделенной фоном на рисунке 1. Минимум выражения $2x + y$ в этой области достигается при $x = y = 0$, так что получаем $A < 0 \Rightarrow A_{\max} = -1$.

Можно использовать и графический метод. В этом случае все точки особой области должны оказаться выше прямой $y = -2x + A$. При увеличении значения A эта прямая коснется особой области в точке $(0, 0)$, что мы и получили аналитически.

Если изменяемая часть в условии задачи 2 имеет вид $-2x + y > A$, нужно найти минимум выражения $-2x + y$. Поскольку x и y могут изменяться независимо друг от друга, этот минимум достигается при наибольшем значении x и наименьшем значении y . Получаем:

$$A < \min(-2x + y) = -2x_{\max} + y_{\min} = -2 \cdot 30 + 0 = -60,$$

откуда следует, что $A_{\max} = -61$. С точки зрения графического метода прямая $y = -2x + A$ при подъеме коснется особой области в точке $(30, 0)$, это правый нижний угол прямоугольника.

Рассмотрим еще несколько задач, которые решаются похожим образом. Фактически при некотором навыке правильный ответ можно легко найти устно.

Задача 3.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(2x + y < A) \vee (y > x) \vee (x > 30)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Решение.

По сравнению с задачей 1 здесь изменено второе условие, относящееся к постоянной части: $(y > x)$ вместо $(y > 20)$. Находим, так же как и при решении задачи 1, условие, описывающее особую область:

$$(y \leq x) \wedge (x \leq 30) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq x),$$

или в краткой форме:

$$(0 \leq x \leq 30) \wedge (0 \leq y \leq x).$$

Заметим, что значение x на отрезке $[0, 30]$ может изменяться независимо, а вот изменение значения y ограничено выбранным значением x . Особая область для задачи 2 имеет форму треугольника (рис. 4).

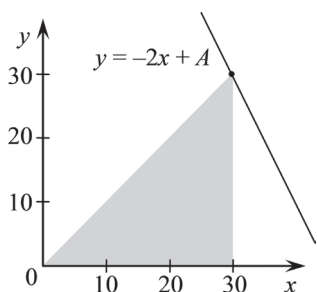


Рис. 4

Для решения задачи нам нужно, как и в задаче 1, найти максимум функции $2x + y$ на множестве точек особой области с целочисленными координатами. Заметим, что наибольшие значения x и y достигаются одновременно в точке $(30, 30)$. С точки зрения графического подхода это означает, что прямая $y = -2x + A$, перемещаясь вниз

при уменьшении значения A , касается особой области в этой критической точке. Поэтому получаем:

$$\max(2x + y) = 2x_{\max} + y_{\max} = 2 \cdot 30 + 30 = 90,$$

что дает $A_{\min} = 91$.

То же самое решение имеет задача с другим выражением:

$$(2x + y < A) \vee (y < x) \vee (y > 30).$$

Особая область, которая в этом случае задается условием:

$$(0 \leq x \leq y) \wedge (0 \leq y \leq 30),$$

изображена на рисунке 5.

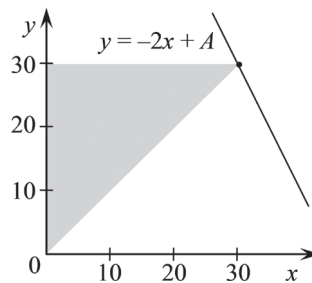


Рис. 5

Отметим, что функция, заданная в изменяемой части, мало влияет на ход решения задачи. Вместо прямой может быть задана, скажем, гипербола или парабола. Важно только, в какой точке она коснется особой области.

Задача 4.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(xy < 2A) \vee (y < x) \vee (y \geq 10)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Решение.

Так же как и в предыдущих задачах, определим условие, задающее особую область:

$$(0 \leq x \leq y) \wedge (0 \leq y < 11).$$

Обратим внимание, что знак $\geq$ в последней скобке поменялся на $<$. Чтобы случайно не задействовать значение $y = 11$, которое не входит в особую область, перепишем условие в виде:

$$(0 \leq x \leq y) \wedge (0 \leq y \leq 10).$$

Здесь учтено, что значения x и y должны быть целочисленными. Область, соответствующая этому условию, выделена фоном на рисунке 6.

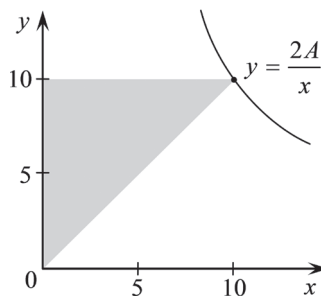


Рис. 6

В отличие от предыдущих задач, график функции, соответствующей изменяемой части выражения, — это не прямая, а гипербола: $y = 2A/x$. Для решения нам нужно найти максимум функции xy на множестве пар целочисленных значений (x, y) в особой области, изображенной на рисунке 6.

Значение y может изменяться в пределах от 0 до 10, а значение x ограничено сверху выбранным значением y . Однако x и y достигают максимальных значений *одновременно* в точке $(10, 10)$, там же достигает максимума и функция xy . Поэтому наименьшее значение A определяется неравенством:

$$2A > \max(xy) = x_{\max} \cdot y_{\max} = 10 \cdot 10 = 100.$$

Решая неравенство, получаем $A > 50$, откуда следует, что $A_{\min} = 51$.

3. Задачи средней сложности

Задача 5.

Для какого наибольшего целого числа A выражение

$$(y + 2x \neq 21) \vee (y > A) \vee (x > A)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых **положительных** x и y ?

Решение.

В сравнении с предыдущими задачами эта имеет ряд особенностей. Во-первых, заметим, что по условию x и y — положительные числа (в предыдущих задачах было достаточно, чтобы они были неотрицательными). Это обстоятельство может изменить результат, поэтому его нужно учитывать при построении особой области.

Во-вторых, постоянная часть заданного выражения представляет собой отношение «не равно». При этом условие, определяющее особую область, сводится к равенству:

$$y + 2x = 21.$$

Несложно увидеть, что это уравнение описывает прямую $y = -2x + 21$, которая пересекает первый координатный угол. При ограничениях $x \geq 1$ и $y \geq 1$ она усекается до отрезка (рис. 7).

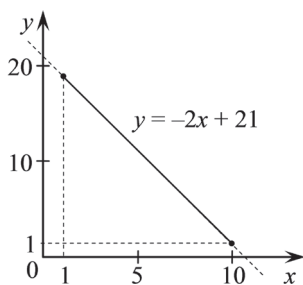


Рис. 7

Итак, в этой задаче особая область — это отрезок. Для того чтобы заданное выражение было истинно при всех натуральных значениях x и y , необходимо, чтобы для всех точек этого отрезка было истинно выражение в изменяемой части $(y > A) \vee (x > A)$. Это означает, что любая точка отрезка должна оказаться в полуплоскости $y > A$ или в полуплоскости $x > A$. Область, которую образуют эти полуплоскости при $A = 10$, выделена фоном на рисунке 8.

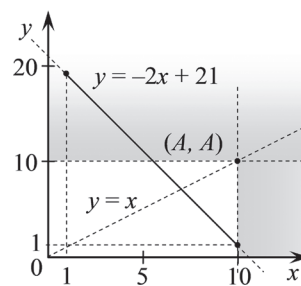


Рис. 8

Из рисунка 8 видно, что при $A = 10$ правая часть отрезка не попадает в нужную область, поэтому значение A нужно уменьшать. Заметим, что угол нужной области — это точка с координатами (A, A) . При изменении значения A она перемещается вдоль прямой $y = x$. При некотором значении A она окажется на отрезке, который нам нужно перекрыть. Это критическая точка — точка пересечения отрезка (или, что то же самое, прямой $y = -2x + 21$) и прямой $y = x$. Ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = -2x + 21; \\ y = x. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений получено из постоянной части выражения, а второе — из двух условий в изменяемой части.

Решив систему, находим координаты критической точки: $x = y = 7$. Поэтому $A < 7$ и, следовательно, $A_{\max} = 6$.

Задача 6.

Для какого наибольшего целого числа A выражение

$$(y - 2x \neq 11) \vee (2y > A) \vee (x > A)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых **положительных** x и y ?

Решение.

Попытка применить «в лоб» алгоритм, использованный для решения предыдущей задачи, приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 11; \\ 2y = x. \end{cases}$$

Решение этой системы дает $x = -14$, $y = -7$. Точка с такими координатами находится за пределами рассматриваемой области ($x > 1$, $y > 1$), поэтому так решать эту задачу нельзя.

Попробуем разобраться, что происходит.

В постоянной части заданного выражения изменился (в сравнении с предыдущей задачей) знак коэффициента при x . Это значит, что теперь особая область — это не отрезок, а луч — часть прямой $y = 2x + 11$ справа от границы $x = 1$ (рис. 9).

Для того чтобы заданное выражение было истинно для всех пар положительных целых значений (x, y) , необходимо и достаточно, чтобы для всех точек этого луча с целочисленными координатами выполнялось одно из условий: $(2y > A)$ или $(x > A)$. На рисунке 9 фоном выделены области, соответствующие этим условиям, при выборе $A = 10$. В нашем случае критической точкой является точка $(1, 13)$, что дает:

$$(A < 2 \cdot 13 = 26) \text{ или } (A < 2).$$

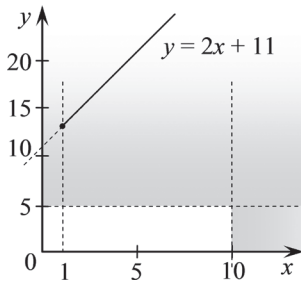


Рис. 9

Поскольку достаточно выполнение одного из условий, выбираем менее жесткое ограничение $A < 26$, т. е. $A_{\max} = 25$.

Задача 7.

Для какого наименьшего целого числа A выражение

$$(y + 3x \neq 19) \vee (2x + 16 < A) \wedge (3y < A)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых **положительных** x и y ?

Решение.

Как и в задаче 5, постоянная часть заданного выражения $y + 3x \neq 19$ определяет особую область — отрезок прямой $y + 3x = 19$, отсеченный линиями $x = 1$ и $y = 1$ (рис. 10).

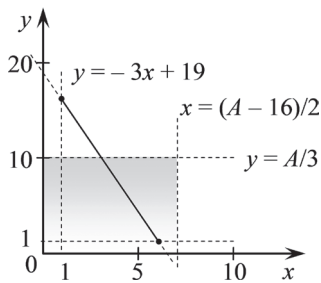


Рис. 10

Для всех точек этого отрезка должно выполняться условие в изменяемой части выражения:

$$(2x + 16 < A) \wedge (3y < A).$$

Обратим внимание, что два отношения связаны **конъюнкцией**, т. е. требуется, чтобы они были выполнены одновременно. Ограничения на значение A можно переписать через решение задачи линейного программирования:

$$A > \max(2x + 16) \text{ и } A > \max(3y).$$

где максимум берется по всем точкам «особого отрезка» с целочисленными координатами. Поскольку в этих условиях x и y фигурируют отдельно (не связаны между собой), имеем:

$$A > 2x_{\max} + 16 = 2 \cdot 6 + 16 = 28;$$

$$A > 3y_{\max} = 3 \cdot 16 = 48.$$

Минимальное целочисленное значение A , которое удовлетворяет обоим условиям, равно $A_{\min} = 49$.

Эту задачу можно решать и графоаналитическим методом. Область, которая задается изменяемой частью выражения $(2x + 16 < A) \wedge (3y < A)$ в первом координатном углу, — это прямоугольник. На рисунке 10 показан пример такого прямоугольника при выборе $A = 30$. При увеличении значения A размеры прямоугольника увеличиваются, и в какой-то момент внутри него окажется весь отрезок. Критической точкой может стать любой из

концов отрезка — либо точка (1, 16), либо точка (6, 1). Для первой из этих точек необходимо выполнить условие:

$$A > 3y = 3 \cdot 16 = 48,$$

а для второй — условие:

$$A > 2x + 16 = 2 \cdot 6 + 16 = 28.$$

Эти условия должны выполняться одновременно, поэтому:

$$A_{\min} = \max(28, 48) + 1 = 49.$$

4. Сложные задачи

Теперь рассмотрим несколько задач, в которых особая область имеет сложную форму. При этом ключевой пункт решения состоит в том, чтобы определить критическую точку, в которой линия, соответствующая изменяемой части, коснется этой особой области.

Задача 8.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x + 3y > 19) \vee (2x - y > 3) \vee (y + 2x - A < 0)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

Решение.

Выделим из заданного выражения постоянную часть:

$$(x + 3y > 19) \vee (2x - y > 3).$$

Чтобы определить особую область, выполним инверсию этого условия и добавим ограничения на x и y (они должны быть неотрицательными):

$$(x + 3y \leq 19) \wedge (2x - y \leq 3) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0).$$

Перепишем это условие в другой форме:

$$(y \leq (19 - x)/3) \wedge (y \geq 2x - 3) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0).$$

Особая область, определенная этими условиями, ограничена четырьмя прямыми, в том числе осями координат (рис. 11).

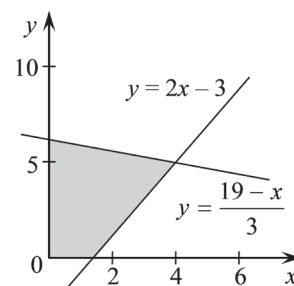


Рис. 11

Рассмотрим изменяемую часть заданного выражения $y + 2x - A < 0$, что равносильно $y < -2x + A$. Это условие должно выполняться для всех точек с целочисленными координатами внутри особой области, т. е. эти точки должны оказаться ниже прямой $y = -2x + A$. Перепишав условие в форме: $A > y + 2x$, можно сформулировать задачу линейного программирования:

$$A > \max(y + 2x) \text{ при ограничениях}$$

$$(y \leq (19 - x)/3) \wedge (y \geq 2x - 3) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0).$$

Для школьника решить эту задачу аналитически довольно сложно, проще воспользоваться графоаналитическим методом.

При уменьшении значения A прямая $y = -2x + A$ впервые коснется особой области в точке пересечения прямых $y = (19 - x)/3$ и $y = 2x - 3$ (рис. 12).

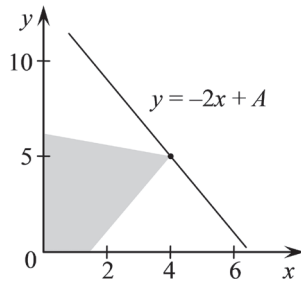


Рис. 12

Координаты критической точки определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{19 - x}{3}; \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x = 4$, $y = 5$. Чтобы найти условие, которому должно удовлетворять значение A , подставляем эти координаты в изменяемую часть выражения:

$$A > y + 2x = 5 + 2 \cdot 4 = 13.$$

Откуда следует, что $A_{\min} = 14$.

Задача 9.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(y + 2x < A) \vee (3y + 2x > 123) \vee (3y - x > 30)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых **положительных** x и y ?

Решение.

Выделим постоянную часть заданного выражения:

$$(3y + 2x > 123) \vee (3y - x > 30).$$

Условия, определяющие особую область, получаются в результате инверсии этого выражения с добавлением ограничений на положительность значений x и y :

$$(3y + 2x \leq 123) \wedge (3y - x \leq 30) \wedge (x \geq 1) \wedge (y \geq 1).$$

В другой форме:

$$(y \leq -2x/3 + 41) \wedge (y \leq x/3 + 10) \wedge (x \geq 1) \wedge (y \geq 1).$$

Эта область выделена фоном на рисунке 13.

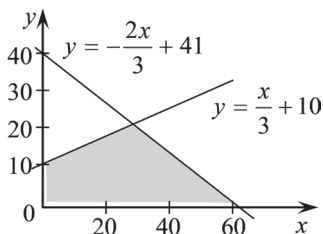


Рис. 13

Для всех точек особой области должна быть истинной изменяемая часть заданного выражения, т. е. должно выполняться условие $y + 2x < A$. Это позволяет сформулировать задачу линейного программирования:

$$A > \max(y + 2x) \text{ при ограничениях}$$

$$(y \leq -2x/3 + 41) \wedge (y \leq x/3 + 10) \wedge (x \geq 1) \wedge (y \geq 1).$$

Как и в предыдущей задаче, для решения воспользуемся графоаналитическим методом.

Условие $y + 2x < A$ можно переписать в виде $y < -2x + A$. Это означает, что все точки особой области с целочисленными координатами должны находиться ниже прямой $y = -2x + A$. Точка касания этой прямой и особой области определяется наклонами прямых. Поскольку угловой коэффициент «подвижной» прямой $y = -2x + A$ по модулю равен 2, а угловой коэффициент прямой $y = -2x/3 + 41$, образующей правую границу особой области, по модулю меньше, чем 2 (он равен $-2/3$), касание произойдет в самой правой точке особой области при $y = 1$. Абсцисса этой точки находится подстановкой значения $y = 1$ в уравнение $y = -2x/3 + 41$, что дает $x = 60$ (рис. 14).

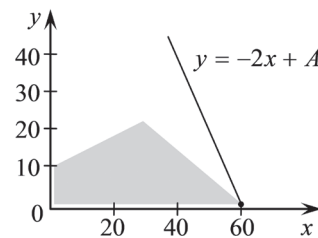


Рис. 14

Подставляя координаты точки $(60, 1)$ в условие $y + 2x < A$, получаем $A > 121$, откуда следует $A_{\min} = 122$.

Отметим, что, если бы коэффициент наклона подвижной прямой был по модулю меньше, чем $2/3$, касание произошло бы в самой верхней точке особой области, т. е. в точке пересечения прямых $y = -2x/3 + 41$ и $y = x/3 + 10$, которая имеет координаты $(31, 20\frac{1}{3})$.

Задача 10.

Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(y - 20 \sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120) \vee (y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых **положительных** x и y ?

Решение.

Выделим постоянную часть заданного выражения:

$$(y - 20 \sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120).$$

Условия, определяющие особую область, получаются в результате инверсии этого выражения с добавлением ограничений на положительность значений x и y :

$$(y - 20 \sin(x/5) \leq 10) \wedge (4y + x^2 \leq 120) \wedge (x \geq 1) \wedge (y \geq 1).$$

В другой форме:

$$(y \leq 20 \sin(x/5) + 10) \wedge (y \leq -x^2/4 + 30) \wedge (x \geq 1) \wedge (y \geq 1).$$

Эта область выделена фоном на рисунке 15.

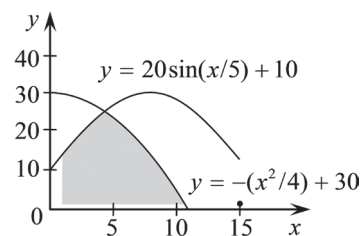


Рис. 15

Рассмотрим теперь изменяемую часть заданного выражения:

$$y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax.$$

В ней можно выделить полный квадрат, преобразовав к виду $y < (x - A)^2 + 10$. Таким образом, для выполнения заданного условия необходимо и достаточно, чтобы все точки особой области с целочисленными координатами оказались ниже параболы $y = (x - A)^2 + 10$ (рис. 16).

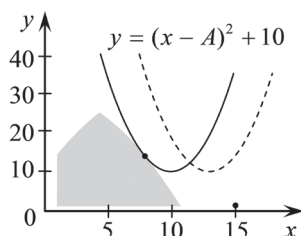


Рис. 16

Как следует из уравнения параболы, при изменении значения A она смещается по горизонтали. При достаточно больших значениях A вся особая область находится под левой ветвью параболы, при этом заданное выражение истинно для всех x и y . При уменьшении значения A парабола смещается влево и в какой-то момент касается особой области, точнее, ее правой границы, которая описывается уравнением $y \leq -x^2/4 + 30$. Значение A , соответствующее точке касания двух парабол, можно найти из уравнения:

$$(x - A)^2 + 10 = -x^2/4 + 30.$$

Это уравнение сводится к виду:

$$5x^2/4 - 2Ax + A^2 - 20 = 0.$$

Точка касания характеризуется тем, что уравнение имеет кратный вещественный корень, т. е. его дискриминант равен нулю:

$$D = 4A^2 - 5(A^2 - 20) = 0,$$

что дает $A = 10$. Минимальное значение A , при котором заданное выражение истинно для всех x и y , должно быть больше этого значения, т. е. $A_{\min} = 11$.

5. Программа для проверки решения

Как показано выше, решение задач средней и высокой сложности, как правило, требует некоторых усилий и времени. В то же время учителю часто приходится проверять, правильно ли решена та или иная задача, для которой неизвестен ответ. В таких случаях для проверки решения можно использовать программу на любом языке программирования, которая при известном значении A перебирает все точки с целочисленными координатами в некотором квадрате и считает выражение всегда истинным, если оно истинно для всех рассмотренных точек. Ниже приводится такая программа на языке Python.

```
def f(A, x, y):
    return (y - 2*x != 11) or (2*y > A) or (x > A)
```

```
MINVALUE = 1
MAXVALUE = 200
```

```
A = 0
while True:
    valid = True
```

```
for x in range(MINVALUE, MAXVALUE+1):
    for y in range(MINVALUE, MAXVALUE+1):
        if not f(A, x, y):
            valid = False
            break
    if not valid: break
if valid:
    print(A)
else:
    break
A += 1
```

Функция $f(A, x, y)$ определяет истинность заданного выражения при известных значениях A , x и y . Значения переменных $MINVALUE$ и $MAXVALUE$ выполняют роль констант, задающих минимальное и максимальное значения каждой координаты при переборе.

Перебор начинается со значения $A = 0$ (при необходимости его можно изменить, если предполагается, что нужное значение A может быть отрицательным). Переменная *valid* — это флаг, который сигнализирует о допустимости выбора данного значения A . Если после окончания цикла переменная *valid* имеет значение «истина» (True), значение A допустимо, оно выводится на экран и происходит переход к следующему натуральному значению A . Если переменная *valid* получила значение «ложь» (False), значение A недопустимо и программа заканчивает работу.

В приведенном варианте программа предназначена для поиска максимально допустимого значения A . Выражение, записанное в теле функции $f(A, x, y)$, соответствует задаче 6, рассмотренной в статье. Если нужно решить задачу на поиск минимального значения A , достаточно закомментировать строку, которая начинается словом *else*. Тогда, как только будет найдено первое подходящее значение A , оно выводится на экран и работа программы завершается.

6. Выводы

В настоящей статье показано, что основное содержание задачи № 18 в актуальной версии КИМ ЕГЭ по информатике связано в большей степени с аналитической геометрией, чем с математической логикой. Во многих случаях эта задача может быть интерпретирована как задача целочисленного линейного программирования. Простейшие варианты задачи № 18 имеют несложное аналитическое решение, в более сложных случаях удобнее оказывается графоаналитический метод. По мнению автора, имеет смысл модифицировать эту задачу так, чтобы при ее решении учащийся мог продемонстрировать знание материала по теме «Математическая логика».

Список использованных источников

1. Двойственность в линейном программировании и задача 18 в досрочном ЕГЭ по информатике. <http://egekr.unoforum.pro/?1-4-90-00000227-000-0-0-1527248508>
2. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ. <http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory>
3. Поляков К. Ю. Линейное (и нелинейное) программирование в задаче 18 ЕГЭ по информатике. http://kpolyakov.spb.ru/download/ege_linprog.ppt
4. Поляков К. Ю., Еремин Е. А. Как нам реорганизовать ЕГЭ по информатике? // Информатика в школе. 2019. № 3. С. 2–7.