



В. Ф. Очков, Ю. В. Чудова, А. Н. Долгушев,
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА КОМПЬЮТЕРЕ: ЧИСЛО, ГРАФИК, СИМВОЛ

Аннотация

В статье представлен критический анализ методов аналитического, численного и графического решения задач на компьютере. Решаются три задачи: задача об оптимальных размерах полых геометрических тел (емкостей для хранения жидкости), задача об анимации шарнирного механизма и задача о размерах подводной лодки «Наутилус». Представлен новый ряд математических отношений, основанный на оптимизации полых геометрических объектов. Предложен метод графического решения недоопределенных систем алгебраических уравнений.

Ключевые слова: численная компьютерная математика, аналитическая (символьная) компьютерная математика, геометрическое тело, объем и площадь поверхности геометрического тела, оптимизация, производная функции, решение уравнений, шарнирный механизм, компьютерная графика, анимация, Mathcad, Maple, Mathematica.

DOI: 10.32517/2221-1993-2019-18-3-55-63

Современные средства решения задач на компьютере — это сочетание численных, аналитических и графических методов. Давайте рассмотрим этот тезис на трех интересных задачах.

1. Емкости оптимальной пропорции

Около бензозаправок, на аэродромах можно видеть большие емкости для хранения бензина, керосина и дизельного топлива. Эти емкости (цистерны, резервуары), как правило, выполнены в виде стального вертикально стоящего прямого кругового цилиндра (рис. 1). Такая форма определяется технологией изготовления этих емкостей: на круглое плоское днище, положенное на землю, ставится «на попа» и разворачивается свернутая в рулон боковая поверхность цилиндра (прямоугольный лист металла). Затем все это накрывается круглой плоской крышкой, а швы завариваются.

А многие ли из нас задумывались о пропорциях этих цистерн — об отношении диаметра основания такого цилиндра к его высоте?

Цилиндрическую емкость при заданном ее объеме можно сделать узкой и высокой или, наоборот, широ-

кой и низкой. Если нет каких-то особых ограничений, то такую емкость конструируют так, чтобы на ее изготовление пошло как можно меньше металла, — чтобы площадь ее наружной поверхности была минимальна. Как известно, у всех геометрических тел площадь на-



Рис. 1. Кадр из фильма «Белое солнце пустыни»
(<https://www.youtube.com/watch?v=GqnqFhc9aho>)

Контактная информация

Очков Валерий Федорович, доктор тех. наук, профессор, профессор кафедры теоретических основ теплотехники, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва; адрес: 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; e-mail: ochkov@twi.mpei.ac.ru

Чудова Юлия Владимировна, ассистент кафедры теоретических основ теплотехники, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва; адрес: 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; e-mail: ChudovaYV@mpei.ru

Долгушев Алексей Николаевич, студент 3-го курса Института тепловой и атомной энергетики, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва; адрес: 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; e-mail: DolgushevAN@mpei.ru

V. F. Ochkov, Yu. V. Chudova, A. N. Dolgushev,
National Research University MPEI, Moscow

THE SOLUTION OF PROBLEMS ON THE COMPUTER: NUMBER, PLOT, SYMBOL

Abstract

The article presents a critical analysis of the methods of analytical, numerical and graphical problem solving on a computer. Problems are solved on the optimal dimensions of hollow geometric bodies (tanks for storing liquids), on the animation of the hinge mechanism, and on the dimensions of the Nautilus submarine. A new set of mathematical constants (numbers and expressions in the radicals), based on the optimization of geometric bodies is presented.

Keywords: numerical computer mathematics, analytical computer mathematics, symbolic computer mathematics, geometric body, surface of geometric body, optimization, derivative of function, solution of equations, articulated mechanism, computer graphics, animation, Mathcad, Maple, Mathematica.

ружной поверхности при фиксированном объеме самая маленькая у *шара*. Но сферическую емкость изготавливать намного сложнее, чем цилиндрическую. Кроме того, ее так просто на земле не поставишь — ей нужны будут особые подпорки. Сферическими делают емкости для хранения газа под давлением (газгольдеры). В этом случае напряжение в металле от внутреннего давления будет равномерно распределяться по поверхности такой емкости. Цилиндрический сосуд внутреннее давление разопрет и даже разорвет. Так бывает, когда, например, в железной бочке замерзает вода.

Несложно догадаться или подсчитать (см. ниже), что у оптимальной емкости, выполненной в виде прямого кругового цилиндра с круглым днищем и круглой крышкой, диаметр основания должен быть равен высоте. При таком условии общая площадь наружной поверхности будет минимальна. Наибольшее вертикальное сечение такой емкости представляет собой квадрат — частный случай прямоугольника (прямоугольник с минимальной длиной периметра при фиксированной площади). Если же такой резервуар делать без верхней крышки, то уже радиус, а не диаметр основания должен быть равен высоте.

А как изменятся оптимальные пропорции, если емкость сделать не в виде цилиндра, а в виде прямого кругового конуса!? В таких емкостях обычно хранят не жидкости или газы, а сыпучие материалы — песок, цемент, размолотый уголь и т. д. (Вернее, так: верхняя часть такой емкости — цилиндрическая, а нижняя, где расположено устройство отбора сыпучего материала, — коническая. Но эта деталь лишняя в описании нашей задачи, хотя такую емкость тоже можно оптимизировать по методике, описанной в данной статье. Там будет уже не два, а три параметра оптимизации: радиус, высота конуса и высота цилиндра — см. раздел 3 статьи). Цилиндрические емкости иногда накрывают не плоской, а конической крышкой, чтобы с них стекала дождевая вода (см. рис. 1).

Вводное замечание. Если человеку нужно написать текст, то в настоящее время он все чаще и чаще прибегает не к ручке/карандашу и бумаге, не к пишущей машинке, а к текстовому процессору (редактору), установленному на компьютере, планшете, смартфоне. Если же человеку требуется создать таблицу, то он опять же будет использовать не бумагу-ручку-линейку, а табличный процессор. Этот, как сейчас говорят, тренд коснулся и математических задач: человек, решая даже несложную задачу, все чаще и чаще использует математические пакеты (математические процессоры), а не карандаш, бумагу и калькулятор (логарифмическую линейку, арифмометр, счеты, если углубляться в историю). Пакет Mathcad и есть один из таких процессоров. Давайте решим нашу задачу оптимизации с помощью этого пакета (версия Mathcad Prime).

На рисунке 2 представлено решение такой задачи: нужно спроектировать коническую емкость объемом $V = 10 \text{ м}^3$ с круглой крышкой так, чтобы наружная площадь S этого геометрического тела (усеченного прямого кругового конуса) была минимальна. В данном случае критерием оптимизации будет площадь $S(R, H)$, являющаяся функцией двух аргументов R и H , а ограничением — требуемый объем $V(R, H) = 10 \text{ м}^3$.

Формальная постановка рассматриваемой задачи получает классический вид задачи поиска минимума

функции двух переменных с ограничением-равенством [1]:

$$S(R, H) \rightarrow \min;$$

$$V(R, H) = 10.$$

В данном случае имеются две переменные (параметры оптимизации) и одно ограничение, т. е. можно приступить к поиску оптимального решения (рис. 2).

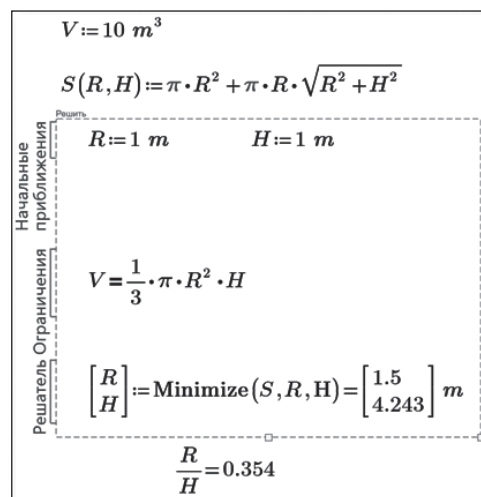


Рис. 2. Численное решение задачи о конусе с минимальной поверхностью

Центральный элемент расчета, показанного на рисунке 2, — встроенная в Mathcad функция *Minimize*, определяющая численно значения переменных R (радиус основания конуса) и H (его высоту), при которых пользовательская функция S (общая площадь наружной поверхности конуса с крышкой) будет минимальной. Такой расчет требует начального приближения (предположения), которое задается пользователем в первой области блока *Решить*.

Во второй области этого блока задаются *ограничения* в виде равенств и неравенств. В нашей задаче о конической емкости ограничение одно — объем емкости равен заданному значению 10 м^3 .

Функция *Minimize* (см. третью область блока *Решить*) вернула значения переменных (параметров оптимизации) R и H , при которых функция S (целевая функция оптимизации) принимает минимальное значение, а ограничение выполняется.

Но если немного подумать, то задачу о конической емкости оптимальной формы можно существенно упростить, если включить ограничение $V(R, H) = 10$ в функцию цели. Из соотношения $V(R, H) = 10$ выразим одну переменную через другую, например $H(R)$ (рис. 3). Тогда, подставляя выражение $H(R)$ в функцию цели $S(R, H)$, получим функцию одной переменной $S(R)$, и задача оптимизации примет простейший вид:

$$S(R) \rightarrow \min.$$

То есть мы не только уменьшили размерность задачи (одна переменная вместо двух), но и избавились от ограничения (точнее, включили его в функцию цели).

Решение этой задачи показано на рисунке 3.

Первым оператором на рисунке 3 аналитически (символьно) решается уравнение объема конуса с крыш-

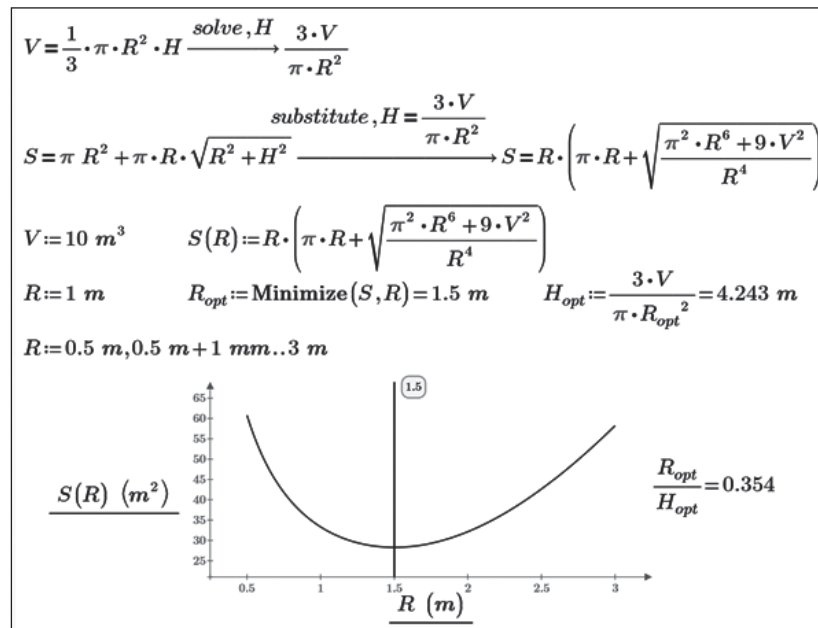


Рис. 3. Гибридное (аналитическое и численное) решение задачи о конусе с минимальной поверхностью

кой. Это, конечно, можно сделать и вручную, без компьютера, но... см. выше. Найденный корень уравнения (символьное значение переменной H) подставляется в оператор создания функции S , которая теперь имеет не два (R и H , как на рисунке 2), а один аргумент — R . Это, повторяем, упрощает задачу и позволяет, в частности, отобразить и проверить визуально решение на графике, где четко просматривается точка минимума. Помимо этого такой прием позволяет вызывать функцию *Minimize* без блока *Решить* (без ограничений в явном виде).

На рисунках 2 и 3 можно видеть рассчитанное значение отношения R к H , равное 0,354. А сохранится ли оно при другом объеме емкости? А можно ли получить это отношение не в виде десятичной дроби (в виде приближенного значения), а в виде формулы с абсолютно точным значением?

Для ответа на эти два вопроса нужно решить задачу не *численно* (рис. 2) и не *гибридно* (символьно плюс численно — см. рис. 3 [4]), а чисто *аналитически* (символьно) — см. рис. 4.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \xrightarrow{\text{solve}, H} \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot R^2} \quad \textcircled{1}$$

$$S = \pi R^2 + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \xrightarrow{\text{substitute}, H = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot R^2}} S = R \cdot \left(\pi \cdot R + \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot R^6 + 9 \cdot V^2}{R^4}} \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{d}{dR} R \cdot \left(\pi \cdot R + \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot R^6 + 9 \cdot V^2}{R^4}} \right) \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{\sqrt{\pi^2 \cdot R^2 + \frac{9 \cdot V^2}{R^4}} \cdot \left(2 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 9 \cdot V^2 + 2 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \sqrt{\pi^2 \cdot R^2 + \frac{9 \cdot V^2}{R^4}} \right)}{\pi^2 \cdot R^6 + 9 \cdot V^2} \quad \textcircled{3}$$

$$2 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 9 \cdot V^2 + 2 \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \sqrt{\pi^2 \cdot R^2 + \frac{9 \cdot V^2}{R^4}} = 0 \xrightarrow{\text{solve}, R} \left[\frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{V^3}}{\frac{1}{8 \cdot \pi^3}} \right] \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{V^3}}{\frac{1}{8 \cdot \pi^3}} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{R}{H} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Рис. 4. Аналитическое решение задачи о конусе с минимальной поверхностью

Первый оператор на рисунке 4 — это оператор символического решения уравнения объема, относительно переменной (неизвестной) H . Этот оператор уже был использован в решении, показанном на рисунке 3. Главное же в решении на рисунке 4 — это поиск производной у выражения 2 для площади поверхности конуса и нахождение нуля этой производной — значения R , при котором производная равна нулю (выражение 3). Эта особая точка непрерывной функции, как известно, может быть максимумом или минимумом [2, 3, 7]. Выражение для производной площади поверхности как функции от радиуса является многочленом шестой степени и имеет соответственно шесть корней. Выберем из них подходящий для нас корень: действительный и неотрицательный. На рисунке 4 показан такой корень (выражение 4). Этот корень подставлен в выражение для отношения R/H , что позволило получить искомым символьный ответ — оптимальное отношение R/H для конуса с круглой плоской крышкой: это корень из двух, деленный на четыре. Десятичное приближение этого значения показано на рисунках 2 и 3. Расчеты на этих рисунках можно считать проверкой правильности символьных преобразований, показанных на рисунке 4, и наоборот.

Примечание. Решение, показанное на рисунке 4, также можно назвать гибридным, и вот почему. В нем работают и символьный движок пакета Mathcad, и сам пользователь, помогая компьютеру. И не только чисто механически, копируя и вставляя в нужные места генерируемые компьютером выражения под номерами 1, 2, 3 и 4 (на рисунке 4 они отмечены кружками с цифрой внутри), но и интеллектуально. В частности, из оператора поиска производной копируется не вся производная, а только ее часть — один из сомножителей числителя дроби: выражение, помеченное цифрой 3. Этим человек помогает компьютеру, принимая во внимание то, что если сомножитель равен нулю, то нулю будет равно и все произведение. Без такого упрощения символьный движок пакета Mathcad не смог бы решить уравнение производной поверхности конуса. (Математик при таком упрощении заметит, что нужно еще проверить, не равен ли нулю знаменатель дроби.)

По методике, показанной на рисунке 4, несложно найти оптимальные пропорции и других полых конструкций.

Если, например, у емкости в виде прямого кругового цилиндра без верхней крышки («стакан») заменить круглое днище с радиусом R на квадрат со стороной $2R$ (перевернутая шапочка ученого с кисточкой наверху ☺), то оптимальное отношение R/H будет равно уже не единице, а значению $\pi/4$ (0,785). Если же оптимизацию провести для емкости в виде прямого кругового конуса с квадратной крышкой со стороной $2R$, то оптимальное отношение R/H будет равно не четверти корня из двух (0,354 — см. рис. 2–4), а вот такому «страшному» значению:

$$\sqrt{\frac{1}{32 \cdot \pi^2 - 2 \cdot \pi^4}} \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \pi^2 + 16} - \pi^2 - 16} = 0,305.$$

Примечание. Пакет Mathcad выдал еще более сложное выражение, которое пришлось упрощать вручную. Опять гибридность!

А можно ли это выражение еще упростить?

Можно полый цилиндр или конус разделить пополам вертикальной перегородкой*, можно эти емкости накрыть не плоской круглой крышкой, а крышкой в виде полусферы и искать оптимальное отношение R/H . Численным или гибридными методами (рис. 2 и 3) это сделать несложно. Но «чистокровное» аналитическое решение (рис. 4) тут будет выглядеть высшим пилотажем. За работу, читатель!

2. Расчет и анимация шарнирного механизма**

Берутся два рычага, у которых один конец неподвижен, а другой вращается по окружности. К подвижным концам рычагов крепятся два других рычага, которые шарнирно соединены друг с другом, — см. внизу рисунка 7 (такие механизмы называют также кривошипами [5]). По какой траектории будет вращаться точка 3?

Задача сводится к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений, отображающих теорему Пифагора, примененную к прямоугольным треугольникам с гипотенузами длиной L_1 и L_2 (см. рис. 7).

На рисунке 5 показано, как в среде Mathcad 15*** численно решается эта система уравнений. Все просто и понятно, но тут возникают две проблемы.

$r1 = 10\text{cm}$ $r2 = 15\text{cm}$ $L = 45\text{cm}$ $L1 = 55\text{cm}$ $L2 = 30\text{cm}$ $\Delta\alpha = 45^\circ$ $n = 2$
 $\alpha = 0^\circ, 1^\circ \dots 360^\circ$ $\beta = \text{FRAME}^\circ$
 $x1 = r1 \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\beta}{n}\right)$ $y1 = r1 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{\beta}{n}\right)$
 $x2 = r2 \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha) + L$ $y2 = r2 \cdot \sin(\beta + \Delta\alpha)$
 $x3 = 50\text{cm}$ $y3 = -20\text{cm}$ **Первое предположение**
Given
 $L1^2 = (x3 - x1)^2 + (y3 - y1)^2$
 $L2^2 = (x3 - x2)^2 + (y3 - y2)^2$
 $\begin{pmatrix} x3 \\ y3 \end{pmatrix} = \text{Find}(x3, y3) = \begin{pmatrix} 61.699 \\ -18.768 \end{pmatrix} \text{cm}$

Рис. 5. Численное решение системы двух нелинейных алгебраических уравнений

Во-первых, у этой задачи два решения: рычаги находятся *под* точками опоры, как показано на рисунке 7, и рычаги находятся *над* точками опоры. Какое решение будет выдано функцией *Find*, будет зависеть

* В конической емкости одновременно хранят песок и цемент. Эти два сыпучих материала разделены вертикальной перегородкой и подаются в устройство для приготовления цементного раствора или бетона.

** Мы бетон приготовили (см. предыдущую сноску), теперь его нужно подать на верхний этаж строящегося здания. Для этого используют специальные автомашины с бетонным насосом-нагнетателем и... шарнирным манипулятором. Подобные устройства также широко используются в робототехнике, которой в настоящее время увлекаются многие школьники и студенты.

*** Ранее (рис. 1–3) мы, как было отмечено, работали в среде Mathcad Prime. Но в этой новой версии пакета нет инструментов анимации. Пришлось вернуться к «старому доброму» Mathcad 15.

$$M := \begin{cases} L1^2 = (x3 - x1(\beta))^2 + (y3 - y1(\beta))^2 \\ L2^2 = (x3 - x2(\beta))^2 + (y3 - y2(\beta))^2 \end{cases} \text{ solve } ,x3,y3 \rightarrow$$

Возвращенный символьный результат слишком велик для отображения, но его можно использовать в последующих вычислениях, если присвоить функции или переменной.

$M_{0,0} \text{ simplify} \rightarrow \frac{(x1(\beta) - x2(\beta)) \cdot [x1(\beta) \cdot y1(\beta)^2 - x1(\beta)^2 \cdot x2(\beta) - x1(\beta) \cdot x2(\beta)^2 + x1(\beta) \cdot y2(\beta)]}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

$M_{0,1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{L1^2 \cdot y2(\beta) - L1^2 \cdot y1(\beta) + L2^2 \cdot y1(\beta) - L2^2 \cdot y2(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y1(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y2(\beta)}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

$M_{1,0} \text{ simplify} \rightarrow \frac{(x1(\beta) - x2(\beta)) \cdot [x1(\beta) \cdot y1(\beta)^2 - x1(\beta)^2 \cdot x2(\beta) - x1(\beta) \cdot x2(\beta)^2 + x1(\beta) \cdot y2(\beta)]}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

$M_{1,1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{L1^2 \cdot y2(\beta) - L1^2 \cdot y1(\beta) + L2^2 \cdot y1(\beta) - L2^2 \cdot y2(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y1(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y2(\beta)}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

$r1 := 10\text{cm} \quad r2 := 15\text{cm} \quad L := 45\text{cm} \quad L1 := 55\text{cm} \quad L2 := 30\text{cm} \quad \Delta\alpha := 45^\circ \quad n := 2$

$\alpha := 0^\circ, 1^\circ \dots 360^\circ \quad \beta := \text{FRAME}^\circ \quad \gamma := 0^\circ, 1^\circ \dots \beta$

$x1(\beta) := r1 \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\beta}{n}\right) \quad y1(\beta) := r1 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{\beta}{n}\right)$

$x2(\beta) := r2 \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha) + L \quad y2(\beta) := r2 \cdot \sin(\beta + \Delta\alpha)$

$x3(\beta) := \frac{(x1(\beta) - x2(\beta)) \cdot [x1(\beta) \cdot y1(\beta)^2 - x1(\beta)^2 \cdot x2(\beta) - x1(\beta) \cdot x2(\beta)^2 + x1(\beta) \cdot y2(\beta)] + x2(\beta) \cdot (L1^2 \cdot y2(\beta) - L1^2 \cdot y1(\beta) + L2^2 \cdot y1(\beta) - L2^2 \cdot y2(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y1(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y2(\beta))}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

$y3(\beta) := \frac{L1^2 \cdot y2(\beta) - L1^2 \cdot y1(\beta) + L2^2 \cdot y1(\beta) - L2^2 \cdot y2(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y1(\beta) + x1(\beta)^2 \cdot y2(\beta) - 2 \cdot x1(\beta) \cdot (x1(\beta) - x2(\beta)) \cdot [x1(\beta) \cdot y1(\beta)^2 - x1(\beta)^2 \cdot x2(\beta) - x1(\beta) \cdot x2(\beta)^2 + x1(\beta) \cdot y2(\beta)]}{2 \cdot (x1(\beta)^2 - x1(\beta) \cdot x2(\beta) + x1(\beta) \cdot y2(\beta))}$

Рис. 6. Аналитическое (символьное) решение системы двух нелинейных алгебраических уравнений и формирование по решениям функций пользователя

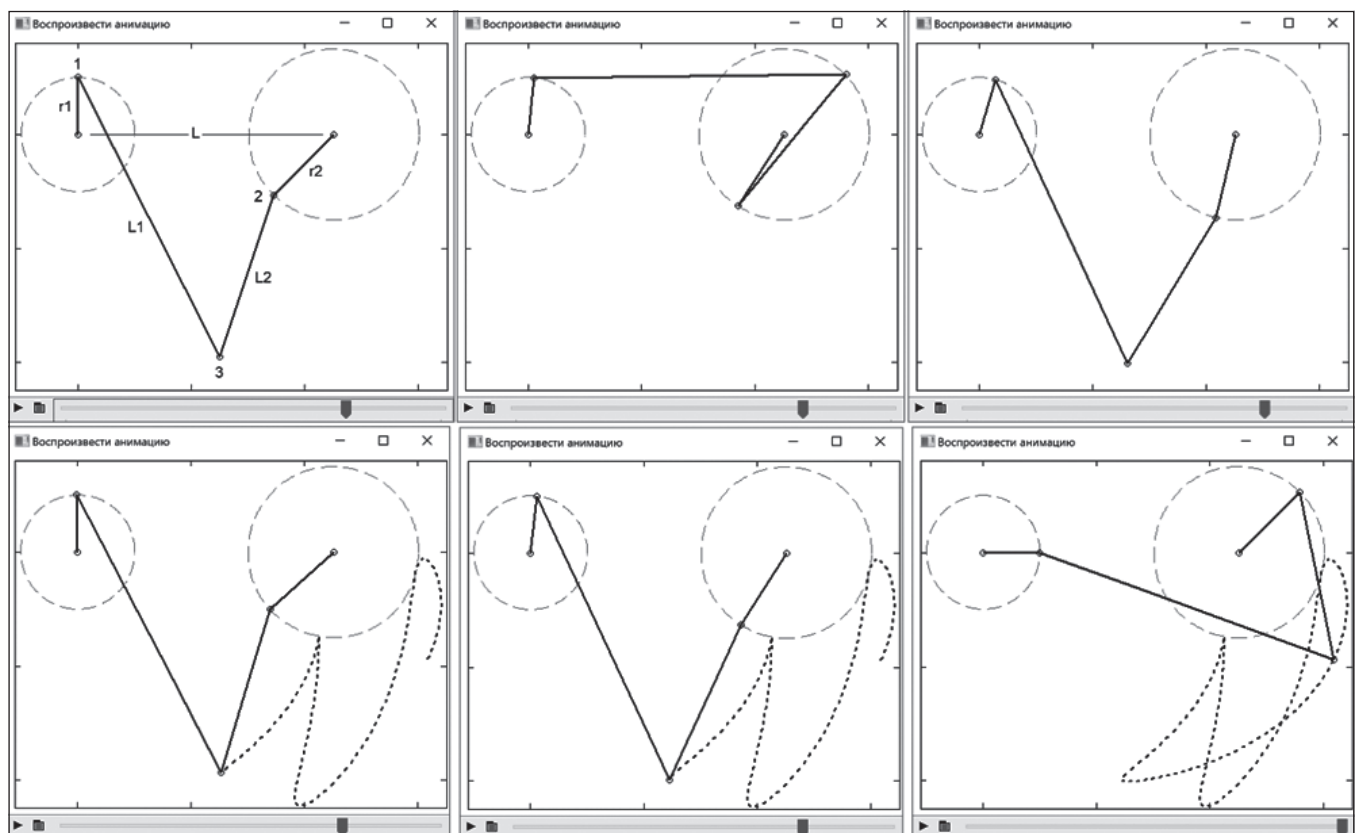


Рис. 7. Кадры анимации движения шарнирного механизма (рычаги вращаются против часовой стрелки):
вверху — численное решение, внизу — символьное решение

от начального приближения (первого предположения), которое не гарантирует нахождения нужного корня из двух возможных. Эта особенность отображена на верхних кадрах анимации, отображенной на рисунке 7: два крайних кадра связаны с первым, нужным корнем системы уравнений, а центральный кадр — со вторым, ненужным корнем: наше шарнирное устройство будет двигаться с «конвульсиями» — резко перескакивать «с корня на корень». Эту недоработку можно исправить, написав после слова *Given* еще одно ограничение: $x_3 > 0$. Но это полумера.

Во-вторых, по численному решению задачи трудно построить кривую траектории движения точки 3 — точки шарнирного соединения двух рычагов.

Кардинально решает эти проблемы отказ от численного решения и переход к символьному.

На рисунке 6 показано *аналитическое* (символьное) решение задачи о шарнирном механизме. Но и тут есть некоторые проблемы, к счастью, решаемые.

Дело в том, что наша система двух уравнений (двух приложений теоремы Пифагора) к задаче о шарнирах при попытке ее решения окрашивается в красный цвет. Многие пользователи тут полагают, что пакет Mathcad не смог решить задачу. Так часто бывает при решении первой задачи — задачи об оптимальной форме сложного полого геометрического тела. Но если к «покрасневшей» системе уравнений не полениться и подвести курсор, то появится спасительная подсказка о том, как действовать дальше (см. рис. 6). Скрытое решение заносится в матрицу M , которая затем выводится поэлементно*. Выведенные на экран таким способом решения (их приходится дополнительно упрощать) можно использовать при создании функций $x_3(\beta)$ и $y_3(\beta)$, рассчитывающих координаты x и y точки 3. Это позволяет избавиться от недостатков численного решения, отмеченных выше: наш шарнирный механизм теперь будет двигаться без «конвульсий», а точка 3 будет вырисовывать свой шлейф (свою траекторию) — см. нижние три кадра анимации, показанные на рисунке 7.

Анимацию, показанную на рисунке 7, можно увидеть на сайте: <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Number-Symbol-and-Plot/td-p/602759>. Там же можно скачать соответствующие Mathcad-файлы. Кстати, посетитель этого сайта Вернер Эксингер (Werner Exinger) предложил вырисовывать траекторию движения точки 3 не равномерными штрихами, а точками, расстояния между которыми пропорциональны скорости движения узла 3. Но скорость нужно учитывать при решении задач динамики. Наша же задача — это задача кинематики.

То, что символьная математика выдает (если, конечно, может выдать) абсолютно точный, а не приближенный ответ, знают все. И это мы еще раз показали примерами 1 и 2. Но то, что эта математика иногда выдает и *ложные ответы*, знают немногие. Покажем эту особенность символьной математики на третьем примере, связанном, как и первый пример, с геометрическими телами.

3. Размеры подводной лодки «Наутилус»

В романе Жюль Верна «Двадцать тысяч лье под водой» описано, как капитан фантастической подводной лодки «Наутилус» (капитан Немо) ответил на вопрос своего пленника профессора Аронакса о размерах субмарины: «Судно представляет собой сильно удлиненный цилиндр с коническими концами. <...> Площадь его равняется одной тысяче одиннадцати и сорока пяти сотым квадратных метров, объем равен одной тысяче пятистам и двум десяткам кубических метров». Капитан Немо фактически на вопрос ответил вопросом, вернее, загадкой [6]. Попробуем отгадать ее с помощью математической программы Mathcad.

Если допустить, что подводная лодка имеет форму геометрического тела, составленного из прямого кругового цилиндра (корпус лодки) и двух одинаковых прямых круговых конусов (нос и корма лодки — см. рис. 8), то задача сводится к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными. На рисунке 9 показана попытка ее решения средствами символьной математики пакета Mathcad 15.

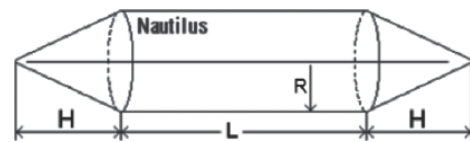


Рис. 8. Схема подводной лодки «Наутилус»

В расчете, показанном на рисунке 9, инструментами символьной математики (оператор *solve*) создаются две вспомогательные функции — одна с именем L_V и аргументами R, H и V , вторая — с именем L_S и с аргументами R, H и S . Первая функция получается в результате аналитического (символьного) решения уравнения объема по переменной L , а вторая — уравнения поверхности по той же переменной. Эти две функции тождественны (длина лодки должна быть одинакова при любых способах ее выражения) и образуют третье (основное) уравнение:

$$L_V(R, H, V) = L_S(R, H, S),$$

которое решается аналитически по переменной H . В результате решения генерируются два выражения, которые формируют функцию-вектор с именем H с тремя аргументами — R, V и S . По этой функции строится график, вернее, два графика (сплошная линия и пунктир) при фиксированных значениях аргументов (параметров) $V = 1500 \text{ м}^3$, $S = 1010 \text{ м}^2$ (см. выше описание задачи**) и при аргументе R , изменяющемся от -20 до 13 м с шагом 1 мм (отрицательные значения R нужны для математического, а не для физического смысла задачи).

Из графика на рисунке 9 явствует, что для каждого значения длины носа (кормы) подводной лодки H в ин-

* У этой матрицы две строки и два столбца: два решения для двух неизвестных.

** Мы округлили значения V и S с $1500,2$ до 1500 и с $1011,45$ до 1010 . Жюль Верн по образованию был адвокатом, а не инженером. Этим можно объяснить излишнюю точность при задании объема и площади подводной лодки. В научно-фантастической литературе авторы часто стараются оперировать некой показной высокой точностью, чтобы было побольше научности и поменьше фантастичности.

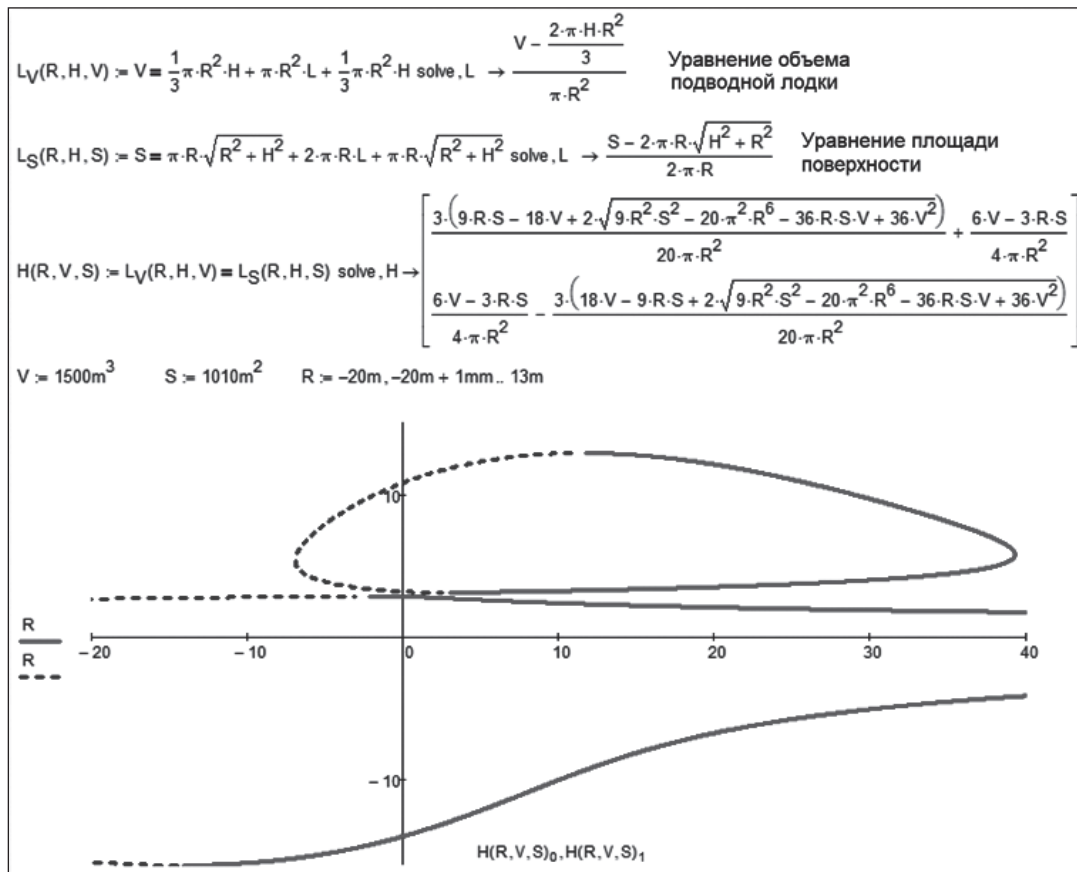


Рис. 9. Символьное решение задачи о подводной лодке «Наутилус»

тервале от нуля до примерно 40 м существуют четыре значения радиуса лодки R , одно из которых отрицательное. Но несложно показать, что нижние две кривые на рисунке 9 являются ложными. Это можно доказать элементарной проверкой — подстановкой значений R , меньших 3 м, в уравнение поверхности подводной лодки: это уравнение не превратится в тождество. В тождество превратится только уравнение объема.

Описанная ошибка символьной математики запутанна и вот в каком плане. При решении уравнений или системы уравнений ответ часто выдается в виде вектора, один или несколько элементов которого ложные (по-

сторонние). В нашей же задаче оба ответа наполовину верны, наполовину ложны.

Ошибку символьной математики, зафиксированную на рисунке 9, можно выявить и по-другому — построить график замкнутой функции $L_V(R, H, V) = L_S(R, H, S)$ в среде еще одного популярного математического «процессора» — пакета Maple (рис. 10) (в Mathcad, увы, нет встроенной функции *implicitplot* для построения графика замкнутой функции).

Никаких «нижних» ложных кривых при численно-графическом решении задачи о подводной лодке «Наутилус» на рисунке 10 не оказалось. «Число» подправило «символ».

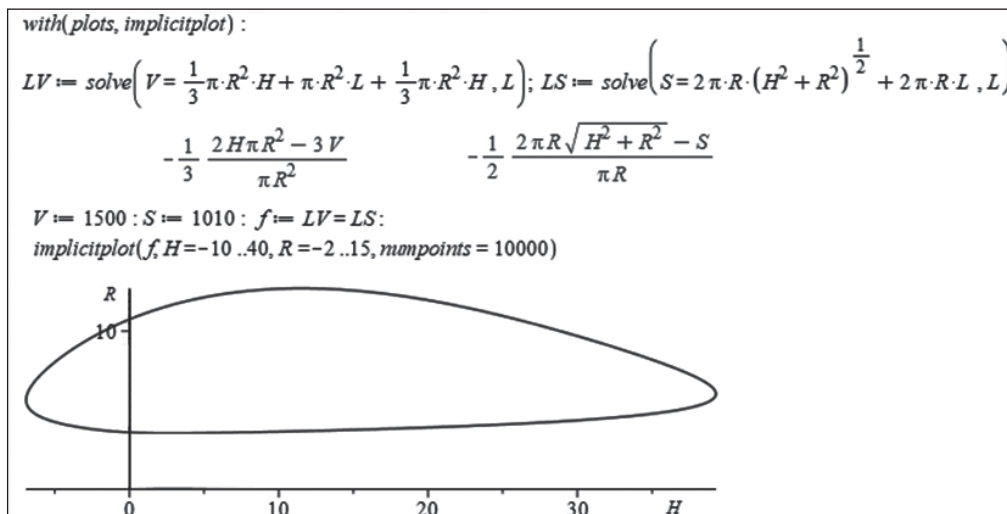


Рис. 10. Численное решение задачи о подводной лодке «Наутилус» в среде Maple

Но вернемся к пакету Mathcad. Да, в среде этого пакета нельзя так просто, как в среде Maple, построить график замкнутой функции. Но если нельзя, но очень хочется, то... можно — см. рис. 11. Более того, особыми приемами можно построить более сложную замкнутую трехмерную кривую.

$$\approx(a, b) := \left| \frac{a-b}{a+b} \right| < 0.001$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \text{ solve, } L \rightarrow \frac{V - \frac{2 \cdot \pi \cdot H \cdot R^2}{3}}{\pi \cdot R^2}$$

$$V := 1500 \text{ m}^3 \quad S := 1100 \text{ m}^2$$

$$\begin{pmatrix} vR \\ vH \\ vL \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{for } R \in 2\text{m}, 2\text{m} + 1\text{cm}.. 15\text{m} \\ \text{for } H \in -20\text{m}, -20\text{m} + 1\text{cm}.. 60\text{m} \\ \quad L \leftarrow \frac{V - \frac{2 \cdot \pi \cdot H \cdot R^2}{3}}{\pi \cdot R^2} \\ \quad \text{if } S \approx (2\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L) \\ \quad \quad \begin{array}{l} vR_i \leftarrow R \\ vH_i \leftarrow H \\ vL_i \leftarrow L \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} vR \\ vH \\ vL \end{pmatrix}$$

Рис. 11. Численное решение задачи о подводной лодке «Наутилус» в среде Mathcad

В решении, показанном на рисунке 11, программными средствами Mathcad сканируется прямоугольная область значений переменной R (от 2 до 15 м с шагом 1 см) и переменной H (от -20 до 60 м с тем же шагом). В теле двойного цикла по уравнению объема лодки определяется значение L , а затем проверяется, является ли очередная тройка значений R , H и L корнем уравнения площади поверхности лодки. Если это так (уравнение

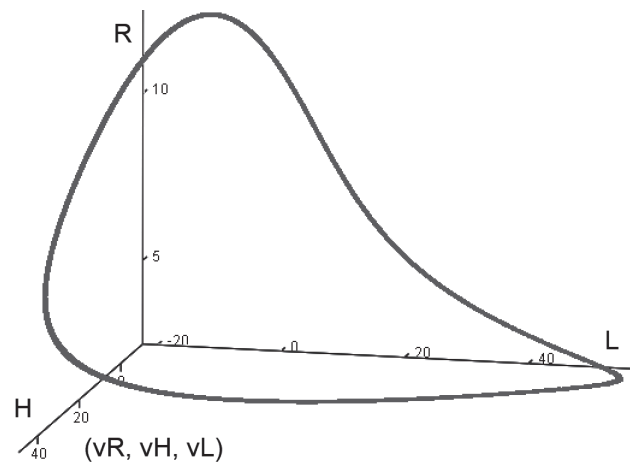


Рис. 12. Результат численного решения задачи о подводной лодке «Наутилус»

примерно превращается в тождество), то текущие значения переменных R , H и L складываются в векторах vR , vH и vL . Затем эти три вектора графически отображаются (рис. 12). И на рисунке мы опять же не видим никаких «нижних» ложных кривых, полученных в результате неверного аналитического решения задачи, отображенного на рисунке 9. Замкнутая трехмерная кривая, показанная на рисунке 12, — это есть искомое решение (множество решений) системы двух нелинейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

Кстати, пакет Maple также неправильно решил уравнение $L_v(R, H, V) = L_s(R, H, S)$, показанное на рисунке 9.

И третий популярный пакет символьной математики, Mathematica (сетевая версия), также споткнулся на этой, казалось бы, тривиальной задаче — см. рис. 13.

Если по двум выражениям для H при $V = 1500 \text{ m}^3$ и $S = 1010 \text{ m}^2$ построить графики по аргументу R , то опять же «вылезают» досадные ложные «нижние» кривые. Эта особенность компьютерной математики аналитических преобразований требует отдельного исследования.

Авторы попросили одного преподавателя математики вручную решить систему уравнений подводной лодки «Наутилус». Этот человек испробовал несколько листов бумаги, но так и не нашел ответа. При этом было

$$(V - (2 \cdot \pi \cdot H \cdot R^2) / 3) / (\pi \cdot R^2) = (S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}) / (2 \cdot \pi \cdot R), \text{ solve } H$$

Input interpretation:

solve	$\frac{V - \frac{1}{3}(2\pi H R^2)}{\pi R^2} = \frac{S - 2\pi R \sqrt{H^2 + R^2}}{2\pi R}$	for	H
-------	--	-----	-----

Results:

$$H = \frac{3 \left(-\frac{4V}{R^2} - \frac{\sqrt{-20\pi^2 R^6 + 9R^2 S^2 - 36RSV + 36V^2}}{R^2} + \frac{2S}{R} \right)}{10\pi}$$

$$H = \frac{3 \left(-\frac{4V}{R^2} + \frac{\sqrt{-20\pi^2 R^6 + 9R^2 S^2 - 36RSV + 36V^2}}{R^2} + \frac{2S}{R} \right)}{10\pi}$$

Рис. 13. Символьное решение задачи о подводной лодке «Наутилус» в пакете Mathematica на сайте Wolfram

сделано предположение, что компьютерная символьная математика на каком-то этапе решения ищет корень квадратного уравнения, но оставляет для дальнейших преобразований не тот корень!

Обычно говорят так: аналитическое (символьное) решение задачи, в частности решение алгебраического уравнения, дает (если, конечно, дает) абсолютно точный ответ. Численное же решение — это приближенное решение (см. раздел 1 статьи). Но наша задача о «Наутилусе» показывает, что это утверждение может иметь исключения: символьное решение задачи на компьютере может давать несколько решений, среди которых может затесаться и неверное. Такое решение можно назвать, следуя современной терминологии, *фейковым решением*. Фейковая новость — это, как известно, новость, очень похожая на истинную, но не совсем истинная.

Вывод: подвергать проверке и критическому анализу нужно не только численные ответы компьютера, но и символьные!

Список использованных источников

1. Гончаров В. А. Методы оптимизации: учебное пособие. М.: Высшее образование, 2009. 191 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: учебник для вузов. Ч. 1. 7-е изд. М. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. М.: Дрофа, 2003. 704 с.
4. Очков В. Ф., Бобряков А. В., Хорьков С. Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. 2017. Т. 4. № 2. С. 5–26. https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_14_168.pdf
5. Очков В. Ф., Нори М. Путешествие в мир науки и искусства на стопроходящей машине Чебышёва // Информатика в школе. 2018. № 8. С. 53–61.
6. Очков В. Ф., Федоров Ю. С., Воронова Ю. С., Мусеева А. Д. Подводная лодка «Наутилус» и новые образовательные технологии // Cloud of Science. 2018. Т. 5. № 1. С. 5–39. https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_5_005.pdf
7. Файншмидт В. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента. СПб.: ВНУ, 2007. 224 с.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Уважаемые коллеги!

Статьи для публикации в журналах «Информатика и образование» и «Информатика в школе» должны отправляться в редакцию **только через электронную форму на сайте ИНФО (раздел «Авторам → Отправка статьи»):**

<http://infojournal.ru/authors/send-article/>

Обращаем ваше внимание, что для отправки статьи необходимо предварительно зарегистрироваться на сайте ИНФО (или авторизоваться — для зарегистрированных пользователей).

С требованиями к оформлению представляемых для публикации материалов можно ознакомиться на сайте ИНФО в разделе **«Авторам»:**

<http://infojournal.ru/authors/>

Дополнительную информацию можно получить в разделе **«Авторам → Часто задаваемые вопросы»:**

<http://infojournal.ru/authors/faq/>

а также в редакции ИНФО:

e-mail: readinfo@infojournal.ru

телефон: (495) 140-19-86