



Е. А. Мирончик,
лицей № 111, г. Новокузнецк, Кемеровская область

АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ И ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Аннотация

В статье рассматривается метод решения задания № 18 ЕГЭ по информатике и ИКТ. Основная идея метода состоит в записи условия задачи на языке формальной логики с использованием элементарных предикатов. Полученное сложное логическое выражение по законам логики преобразовывается в выражение, по которому строится геометрическая модель, позволяющая записать ответ. Изложенный алгоритм позволяет задание высокой сложности свести к простому.

Ключевые слова: предикат, базисный предикат, множество, геометрическая модель, логика, логические операции, законы логики, делимость, битовые операции, ЕГЭ.

DOI: 10.32517/2221-1993-2019-18-3-40-47

Знание законов логики обеспечивает учащихся мощным инструментом для решения заданий ЕГЭ и не только тех, которые в кодификаторе отнесены к теме «Логика». В данной статье рассмотрим общие подходы решения различных типов задания № 18. Задания всех известных типов могут быть решены с помощью записи на языке формальной логики исследуемого выражения, применения законов логики [1] и последующего построения **геометрической модели** полученного выражения. Геометрическая модель позволяет перейти в анализе с формального языка на язык множеств и образов. Активизация образного мышления не только способствует меньшей утомляемости на экзамене, но и дает учащимся дополнительный инструмент проверки своего решения.

Среди существующих решений задания № 18 преобладает способ записи исходного выражения через импликацию [3, 5], но, помимо того что выполняется лишний шаг в преобразованиях, есть еще недостатки, затрудняющие решение:

- использование односторонних преобразований;
- необходимость заучивания дополнительных формул;
- разбиение задач на разные типы и рассмотрение частных случаев;

- обилие неформализованных рассуждений;
- описанные методы работают только на одном типе заданий;
- использование операций над множествами без построения геометрической модели.

Перечисленные недостатки затрудняют поиск правильного ответа, делая решение ненадежным, трудоемким и затратным по времени.

Используя в решении только **взаимно однозначные переходы**, будем записывать выражение с помощью трех операций — отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, что соответствует операциям на множествах — дополнения, пересечения и объединения соответственно. Так как исследуемое выражение чаще всего содержит скрытые простые утверждения, соединенные логическими связками, то ключевым моментом решения являются поиск и формализация элементарных высказываний. Например, в задании с побитовыми операциями записано: $x \& 3 \neq 0$. Это высказывание содержит скрытые элементарные утверждения и тождественно дизъюнкции двух простых утверждений: $(x \& 2 \neq 0) \vee (x \& 1 \neq 0)$. Подробно решение заданий с побитовыми операциями рассмотрено в [2].

Условимся использовать для записи логических операций: горизонтальную черту над переменной — для от-

Контактная информация

Мирончик Елена Александровна, учитель информатики, лицей № 111, г. Новокузнецк, Кемеровская область; адрес: 654007, Кемеровская область, г. Новокузнецк, ул. Кирова, д. 35а; e-mail: mironch-elena@yandex.ru

Е. А. Mironchik,
Lyceum 111, Novokuznetsk, Kemerovo Region

ALGEBRA OF PREDICATES AND RELATED GEOMETRIC MODELS CREATION IN REGARDS OF UNIFIED STATE EXAM IN INFORMATICS (RUSSIAN EGE)

Abstract

The article discusses the method of solving the task 18 on the Unified State Examination in Informatics (Russian EGE). The main idea of the method is to write the conditions of the problem utilizing the language of formal logic, using elementary predicates. According to the laws of logic the resulting complex logical expression would be transformed into an expression, according to which a geometric model is supposed to be constructed which allows to obtain an answer. The described algorithm does allow high complexity problem to be converted into a simple one.

Keywords: predicate, basic predicate, set, geometric model, logic, logical operations, laws of logic, divisibility, bit operations, Unified State Exam.

рицания, логическое умножение (точку) — вместо знака конъюнкции \wedge , логическое сложение (плюс) — вместо знака дизъюнкции \vee .

Разберем, как работает описанный метод решения на примере заданий с делимостью. Для формализации скрытых элементарных утверждений вспомним правила, известные из курса математики шестого класса [4]:

Если натуральное число делится на два взаимно простых числа, то оно делится на произведение этих чисел.

Справедливо и обратное утверждение:

Если натуральное число делится на произведение двух взаимно простых чисел, то оно делится на каждое из них.

Введем условные обозначения для формализации высказываний: предикат D_a означает, что число x принадлежит множеству чисел, кратных a ; предикат D_b означает, что число x принадлежит множеству чисел, кратных b .

На языке формальной логики указанные выше правила математики записываются так:

$$D_{a \cdot b} = D_a \cdot D_b, \tag{1}$$

где a и b — взаимно простые числа.

Этой записи соответствует геометрическая модель, представленная на рисунке 1.

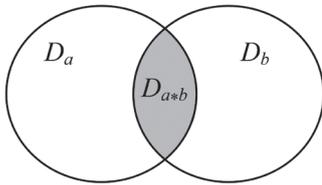


Рис. 1

$D_{a \cdot b}$ описывает все числа на пересечении области истинности предикатов D_a и D_b . Здесь a и b — взаимно простые числа.

Отдельно рассмотрим операции конъюнкции и дизъюнкции над предикатами делимости с числами, кратными друг другу (табл. 1).

Пусть a кратно b , тогда множество всех чисел D_a является подмножеством множества D_b .

Таблица 1

Запись	Пример	Геометрическая модель
$D_a \cdot D_b = D_a$	$D_8 \cdot D_2 = D_8$	 Рис. 2
$D_a + D_b = D_b$	$D_8 + D_2 = D_2$	 Рис. 3

Рассмотрим отрицание к утверждениям из таблицы 1 (табл. 2).

Таблица 2

Запись	Пример	Геометрическая модель
$\overline{D_a \cdot D_b} = \overline{D_a}$ $\overline{D_a + D_b} = \overline{D_a}$	$\overline{D_8 + D_2} = \overline{D_8}$	 Рис. 4
$\overline{D_a + D_b} = \overline{D_b}$ $\overline{D_a \cdot D_b} = \overline{D_b}$	$\overline{D_8 \cdot D_2} = \overline{D_2}$	 Рис. 5

Временные психологические сложности у учащихся могут быть вызваны тем, что число больше, а круг меньше. Но если в качестве универсального рассматривать множество натуральных чисел, ограниченных сколь угодно большим N , то чисел, кратных 8, меньше, чем чисел, кратных 2. Т. е. справедливым является утверждение, что любое число, кратное 8, кратно 2, но не наоборот.

Любое составное число может быть представлено в виде произведения взаимно простых чисел. Представляя число в виде произведения степеней простых чисел, получаем конъюнкцию *базисных предикатов*.

Например:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2,$$

значит, справедлива запись:

$$D_{72} = D_{2^3} \cdot D_{3^2}.$$

Утверждение, что число делится на 72, представляет собой конъюнкцию базисных предикатов D_{2^3} и D_{3^2} (в данном случае из базисов чисел 2 и 3).

Так как для любых двух различных чисел из одного базиса (разные степени одного и того же числа) справедливо утверждение, что одно число кратно другому, то справедливо утверждение:

$$D_{a^n} \cdot D_{a^m} = D_{a^n}, \text{ при } n > m. \tag{2}$$

Заметим, что в одном базисе геометрическая модель представляет собой концентрические окружности (рис. 6). Направление, указанное стрелкой, соответствует росту показателя степени.

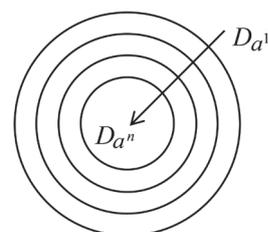


Рис. 6

Полезным при решении будет следующее

Утверждение о подавлении множителя в конъюнкции:

$$\overline{D_{a^n}} + D_{a^m} \cdot P = \overline{D_{a^n}} + P, \quad (3)$$

где $n > m$, а P — логическое выражение.

Доказательство.

Рассмотрим выражение:

$$\overline{D_{a^n}} + D_{a^m} \cdot P,$$

считая, что $n > m$, а P — любое логическое выражение.

Согласно утверждению, что

$$D_{a^n} \cdot D_{a^m} = D_{a^n},$$

имеем:

$$\overline{D_{a^n} \cdot D_{a^m}} + D_{a^m} \cdot P.$$

После применения закона де Моргана получаем:

$$\overline{D_{a^n}} + \overline{D_{a^m} \cdot P}.$$

Применив к выделенному выражению закон:

$$\overline{A} + A \cdot B = \overline{A} + B,$$

получаем, что

$$\overline{D_{a^n}} + \overline{D_{a^m} \cdot P}.$$

Дизъюнкцию двух предикатов из одного базиса обратно заменим на $\overline{D_{a^n}}$:

$$\overline{D_{a^n}} + D_{a^m} \cdot P = \overline{D_{a^n}} + P.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, опишем **прием мнемотехники для запоминания часто используемых логических преобразований.**

Закон поглощения:

$$A + A \cdot B = A. \quad (4)$$

Конъюнкция в этом выражении — это армия, а выражение A — это «один в поле воин» (вы). Кто победит — вы или армия, если в армии ваш клон? «Стреляем» в самого непохожего:

$$A + A \cdot \overline{B} = A + A = A.$$

Тот же прием для

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B. \quad (5)$$

Здесь будем «стрелять» в самого непохожего — \overline{A} , так как он всегда будет «против» вас, в отличие от B , значение которого может совпадать с A .

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B.$$

Вооружившись «запоминалкой» про армию, перейдем к рассмотрению примеров, составленных по мотивам различных источников заданий ЕГЭ [6].

Задание 1.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

Запишем условие с использованием предикатов и избавимся от импликации:

$$(\overline{D_a} \cdot D_6) \rightarrow \overline{D_3} = \overline{\overline{D_a} \cdot D_6} + \overline{D_3}.$$

После применения закона де Моргана получим:

$$D_a + \overline{D_6} + \overline{D_3}.$$

Число 6 не является простым, его представим в виде произведения взаимно простых чисел — $6 = 2 \cdot 3$:

$$\begin{aligned} D_a + \overline{D_6} + \overline{D_3} &= D_a + \overline{D_{2 \cdot 3}} + \overline{D_3} = D_a + \overline{D_2 \cdot D_3} + \overline{D_3} \\ &= D_a + \overline{D_2} + \overline{D_3} + \overline{D_3} = D_a + \overline{D_2} + \overline{D_3}. \end{aligned}$$

Числа 2 и 3 являются взаимно простыми. Преобразования завершены. Переходим к геометрической модели и закрасим множество, соответствующее числам, на которые истинность предиката D_a не влияет (рис. 7).

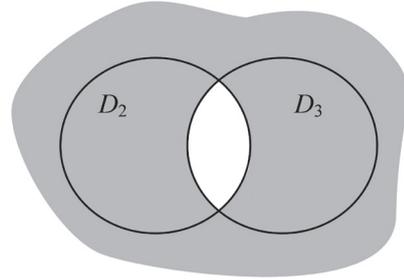


Рис. 7

Заметим, что для получения универсального множества истинность предиката D_a должна быть такой, чтобы «закрыть» белую зону. Белая зона может быть перекрыта множествами истинности предикатов D_2 , D_3 и D_6 . Множество, описываемое предикатом D_6 , в точности соответствует белой зоне, а во множества D_2 и D_3 белая зона включена.

Ответ можно получить дальнейшими преобразованиями, если еще раз применить закон де Моргана:

$$D_a + \overline{D_2 \cdot D_3} = D_a + \overline{D_6}.$$

Ответ: 6.

Задание 2.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула:

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 18)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

Запишем условие с помощью предикатов, избавимся от импликации и применим закон де Моргана:

$$D_a \cdot D_{21} \rightarrow D_{18} = \overline{D_a \cdot D_{21}} + D_{18} = \overline{D_a} + \overline{D_{21}} + D_{18}.$$

Дизъюнкция предикатов D_{18} и $\overline{D_a}$ может стать тождественно истинной при $A = 18$. Но по условию требуется наименьшее значение A , для этого рассмотрим, может ли изменить найденное значение предикат D_{21} . Для этого перейдем к записи выражения через базисные предикаты:

$$\overline{D_a} + \overline{D_{3 \cdot 7}} + D_{2 \cdot 9}.$$

Так как 3 и 7, а также 2 и 9 взаимно просты, то можем записать:

$$\begin{aligned} \overline{D_a} + \overline{D_{3 \cdot 7}} + D_{2 \cdot 9} &= \overline{D_a} + \overline{D_3 \cdot D_7} + D_2 \cdot D_9 = \\ &= \overline{D_a} + \overline{D_3} + \overline{D_7} + D_2 \cdot D_9. \end{aligned}$$

Числа 2, 3, 7 — взаимно простые. Разберем, как будут взаимодействовать между собой предикаты из одного базиса D_3 и D_9 . С целью оставить только необходимое и рассмотреть, можно ли понизить степень вхождения числа 3 в выражение:

$$D_9 = D_9 \cdot D_3$$

$$\overline{D_a} + \overline{D_3} + \overline{D_7} + D_2 \cdot D_9 = \overline{D_a} + \overline{D_3} + \overline{D_7} + D_2 \cdot D_9 \cdot D_3,$$

к выделенным выражениям применим закон (5):

$$= \overline{D_a} + \overline{D_3} + \overline{D_7} + D_2 \cdot D_9.$$

Выполняя последнюю операцию, мы увидели, что уменьшить степень числа 3 не удалось. Дизъюнкция D_3 и $\overline{D_7}$ не может уменьшить найденное A .

Несмотря на то что значение числа A получено на основе анализа формальной записи, рассмотрим геометрическую модель полученного выражения (рис. 8). Закрасим области, при которых выражение истинно независимо от значения предиката D_a .

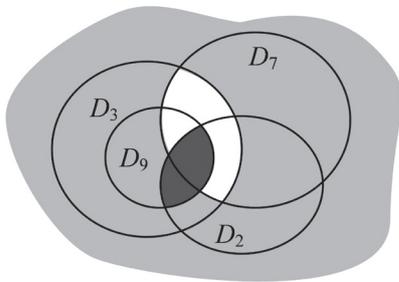


Рис. 8

Так как множество истинности предиката $\overline{D_a}$ — это область за пределами круга, значит, значение a должно быть таким, чтобы область истинности предиката D_a была включена в область, выделенную на рисунке темным цветом. Этому соответствуют все числа, кратные одновременно 2 и 9, т. е. числа 18, 36, 54, Область истинности предиката D_{18} есть пересечение множеств D_2 и D_9 .

Ответ: 18.

Задание 3.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула:

$$(\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

$$\begin{aligned} (D_{15} \cdot \overline{D_{21}}) &\rightarrow (\overline{D_a} + \overline{D_{15}}) = \\ &= (\overline{D_{15}} + D_{21}) + (\overline{D_a} + \overline{D_{15}}) = \overline{D_{15}} + D_{21} + \overline{D_a}. \end{aligned}$$

Продолжим преобразования, представив числа как произведение взаимно простых множителей:

$$\begin{aligned} \overline{D_{3 \cdot 5}} + D_{3 \cdot 7} + \overline{D_a} &= \overline{D_3} \cdot \overline{D_5} + D_3 \cdot D_7 + \overline{D_a} = \\ &= \overline{D_3} + \overline{D_5} + D_3 \cdot D_7 + \overline{D_a} = \overline{D_3} + \overline{D_5} + D_7 + \overline{D_a}. \end{aligned}$$

Так же, как и в задании 2, в полученном выражении имеем дизъюнкцию выражений с отрицанием и без него. Выражение $\overline{D_3} + \overline{D_5}$ на геометрической модели

изображается как объединение областей за границами двух пересекающихся кругов и не может быть дополнено до универсального предикатом $\overline{D_a}$ — в обоих случаях отрицание. Ответ следует искать в противоположных высказываниях — предикат D_7 входит в полученное выражение без отрицания и определяет ответ.

Ответ: 7.

Задание 4.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула:

$$(\text{ДЕЛ}(x, 40) \vee \text{ДЕЛ}(x, 64)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

$$\begin{aligned} (D_{40} + D_{64}) \rightarrow D_a &= \overline{D_{40}} \cdot \overline{D_{64}} + D_a = \overline{D_{2^3 \cdot 5}} \cdot \overline{D_{2^6}} + D_a = \\ &= \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^6}} + D_a = (\overline{D_{2^3}} + \overline{D_5}) \cdot \overline{D_{2^6}} + D_a. \end{aligned}$$

Продолжим преобразования, раскрыв скобки:

$$\overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^6}} + \overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^6}} + D_a.$$

Так как множество D_{2^6} включено в множество D_{2^3} (2^6 кратно 2^3), имеем, что выражение $\overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^6}}$ тождественно $\overline{D_{2^3}}$, получаем:

$$\overline{D_{2^3}} + \overline{D_5} \cdot \overline{D_{2^6}} + D_a = \overline{D_8} + \overline{D_5} \cdot \overline{D_{64}} + D_a.$$

Построим геометрическую модель известной части полученного выражения (рис. 9).

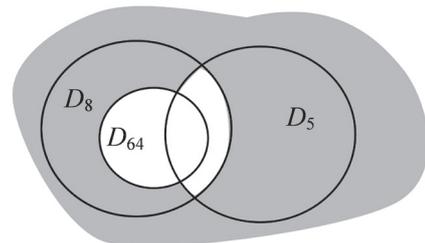


Рис. 9

Круги D_{64} и D_5 , взятые по отдельности, не могут дополнить множество до универсального, и нет числа, описывающего белую зону на рисунке. Дополнить до универсального множества может круг D_8 .

Ответ: 8.

Задание 5.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наибольшего** натурального числа A формула:

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, 36))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

Запишем выражение из условия задачи с помощью предикатов:

$$\overline{D_A} \rightarrow \overline{D_{24}} \cdot \overline{D_{36}}.$$

Избавимся от импликации и сразу перейдем к базисным предикатам:

$$D_A + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_3} \cdot \overline{D_{2^2}} \cdot \overline{D_{3^2}}.$$

По закону де Моргана имеем:

$$D_A + (\overline{D_{2^3}} + \overline{D_3}) \cdot (\overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^2}}).$$

Раскрывая скобки, получим:

$$D_A + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{3^2}} + \overline{D_3} \cdot \overline{D_{2^2}} + \overline{D_3} \cdot \overline{D_{3^2}}.$$

Выделенные выражения — конъюнкция предикатов с отрицанием из одного базиса, поэтому можно понизить степени (см. табл. 2):

$$D_A + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{3^2}} + \overline{D_3} \cdot \overline{D_{2^2}} + \overline{D_3}.$$

По закону поглощения (4) имеем:

$$D_A + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{3^2}} + \overline{D_3}.$$

Дальнейшие преобразования не могут понизить степень используемых базисных предикатов. Можно сразу перейти к геометрической модели (рис. 10), а можно выполнить еще одно преобразование с выделенными предикатами:

$$D_A + \overline{D_{2^2}} \cdot \overline{D_3} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{3^2}} = D_A + \overline{D_{12}} + \overline{D_{2^3}} \cdot \overline{D_{3^2}}$$

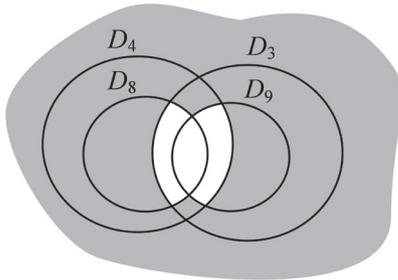


Рис. 10

Множество, описываемое предикатом D_A , должно закрыть белую зону. Это пересечение множеств D_3 и D_4 , т. е. D_{12} . Увеличить число 12 нельзя.

Ответ: 12.

Задание 6.

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «Натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого **наименьшего** натурального числа A формула:

$$\text{ДЕЛ}(x, 2520) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 5940) \vee (\neg \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

Запишем выражение из условия задачи с помощью предикатов:

$$D_{2520} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A}.$$

Если вместо a взять число, равное 2520, то выражение будет истинным. Исследуем возможность уменьшения числа, сохраняя истинность выражения.

Представим составные числа как произведение степеней простых чисел и запишем выражение с использованием базисных предикатов:

$$D_{2520} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A} = \\ = D_{2^3} \cdot D_{3^2} \cdot D_5 \cdot D_7 + \overline{D_{2^2} \cdot D_{3^3} \cdot D_5 \cdot D_{11}} + \overline{D_A} =$$

$$= D_{2^3} \cdot D_{3^2} \cdot \overline{D_5} \cdot \overline{D_7} + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^3}} + \overline{D_5} + \overline{D_{11}} + \overline{D_A}.$$

В выделенных выражениях D_5 с отрицанием и без, значит, в конъюнкции можно убрать этот предикат (см. (5)):

$$D_{2^3} \cdot \overline{D_{3^2}} \cdot \overline{D_7} + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^3}} + \overline{D_5} + \overline{D_{11}} + \overline{D_A}.$$

К выделенным предикатам из базиса числа 3 можно применить доказанное утверждение о подавлении степени в множителе (3). В предикатах, относящихся к базису 2, в конъюнкции степень выше, понижение сделать нельзя.

$$D_{2^3} \cdot \overline{D_7} + \overline{D_{2^2}} + \overline{D_{3^3}} + \overline{D_5} + \overline{D_{11}} + \overline{D_A}.$$

Выделенные предикаты вернем к исходному $\overline{D_{5940}}$. Числа 2³ и 7 — взаимно просты (из разных базисов), значит, можно перейти к предикату, описываемому одним числом, — 56.

$$D_{56} + \overline{D_{5940}} + \overline{D_A}.$$

Полученное выражение упростить нельзя. $\overline{D_A}$ входит в дизъюнкцию с отрицанием, дополнение до универсального — D_{56} .

Ответ: 56.

Мы рассмотрели пример, когда геометрическая модель, подходящая под задачу, — круги, но точки на координатной плоскости или на числовой прямой также могут выступать в роли геометрической модели.

Еще один пример из задания 18 — задание с отрезками.

Задание 7.

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [20; 37]$ и $Q = [50; 63]$. Укажите **наибольшую** возможную длину такого отрезка A , что формула:

$$(x \in A) \wedge (x \notin P) \wedge (x \notin Q)$$

тождественно ложна, т. е. принимает значение 0 при любом значении переменной x .

Решение.

Запишем выражение с помощью предикатов, обозначив $x \in A$ как A , $x \notin P$ как \overline{P} и $x \notin Q$ как \overline{Q} . Исследуемое утверждение будет записано следующим образом:

$$A \cdot \overline{P} \cdot \overline{Q} = 0.$$

Рассуждения всегда проще проводить относительно истинного высказывания. Значит, применим отрицание к левой и правой частям утверждения и получим верное равенство:

$$\overline{A} + P + Q = 1.$$

Перейдем к геометрической модели на числовой прямой и отметим штриховкой часть, в которой независимо от выбора границ отрезка A исследуемое выражение будет истинным. На практике удобно отрезки заданий этого типа обозначать треугольниками. Основание треугольника совпадает с отрезком, название отрезка — у противоположной вершины (рис. 11).

Правильный выбор отрезка A может дополнить закрашенную часть до универсального множества — всей числовой прямой. Числовая прямая будет закрашена полностью, если отрезок будет полностью включен в любой из отрезков P либо Q , но не будет выходить за

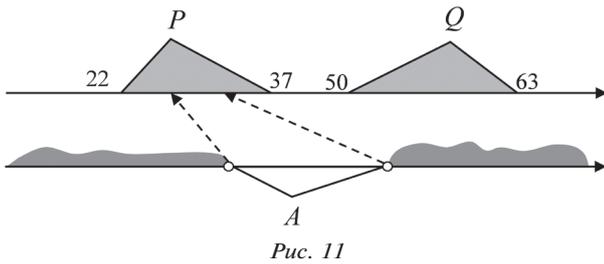


Рис. 11

границы этих отрезков. Значит, выбираем наибольший из этих отрезков.

Ответ: 15.

В следующем примере геометрическая модель — точки с целочисленными неотрицательными координатами.

Задание 8.

Сколько существует целых значений A , при которых формула:

$$(x \geq 17) \rightarrow (x \cdot x > A) \wedge ((y \cdot y > A) \rightarrow (y > 10))$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

Решение.

В выражении записана конъюнкция двух выражений. Для того чтобы все выражение было истинным, необходимо найти границы параметра A , обеспечивающие истинность каждого выражения.

Заменяв импликацию на дизъюнкцию, запишем выражение на языке математики:

$$\begin{cases} x < 17 \\ x^2 > A \\ y > 10 \\ y^2 \leq A \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Знак системы соответствует пересечению описанных множеств, а совокупность — объединению. Так как в условии задачи все числа x , y и A — целые и неотрицательные, то геометрическая модель не прямая, а точки с неотрицательными целочисленными координатами на числовой прямой.

Отметим на числовой прямой множество точек, для которых выражение будет истинным независимо от значения параметра A , — это точки левее 17. Оставшиеся точки должны быть «закрыты» отношением $x^2 > A$ — это выражение тождественно записи $|x| > \sqrt{A}$. Так как в условии задачи оговаривается, что числа неотрицательны, знак модуля можно опустить. Причем корень из A может быть дробным.

На рисунке 12 пунктиром обозначены варианты значения \sqrt{A} , при которых множество будет универсальным. $\sqrt{A} < 17$, следовательно, $A < 17^2$. Получаем, что $A \leq 288$.

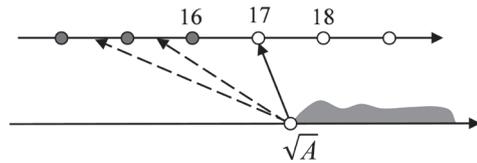


Рис. 12

Проанализируем границу параметра A относительно y .

Закрашенными будут целые точки правее 10. Оставшиеся точки должны быть закрашены после правильного подбора параметра A , задаваемого отношением $y^2 \leq A$. Но так как решаем на множестве целых неотрицательных чисел, то $y \leq \sqrt{A}$.

На рисунке 13 пунктиром обозначены варианты значения \sqrt{A} , при которых множество будет универсальным. Крайнее левое значение \sqrt{A} обозначено сплошной стрелкой. $\sqrt{A} \geq 10$, следовательно, $A \geq 10^2$. Получаем, что $A \geq 100$.

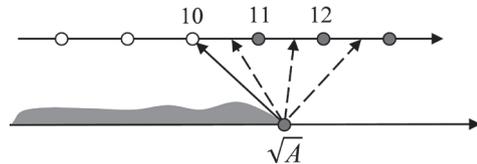


Рис. 13

Значения параметра A задаются двойным неравенством:

$$100 \leq A \leq 288.$$

Количество целых чисел в этом диапазоне:

$$288 - 100 + 1 = 189.$$

Ответ: 189.

Геометрическая модель не является строго обязательной для решения задачи, но, если ученик умеет правильно подбирать необходимую модель и изображать составляющие модель множества с учетом их взаимного расположения, решению задачи модель не помешает.

Приведем еще примеры, в которых следует особое внимание уделить выявлению простых утверждений, — примеры заданий с побитовой конъюнкцией.

Задание 9.

Определите **наибольшее** натуральное число A , такое, что выражение:

$$\begin{aligned} &(((x \& 11 \neq 0) \vee (x \& 35 = 0)) \rightarrow \\ &\rightarrow (x \& 11 \neq 0) \vee ((x \& A = 0) \wedge (x \& 11 = 0))) \end{aligned}$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x).

Решение.

Выражение $x \& 11 \neq 0$ ограничивает множество различных значений x , но выражение станет истинным, если единица двоичного представления числа x совпадет **хотя бы** с одной единицей двоичного представления числа 11. Выражение $(x \& 11 \neq 0)$ истинно тогда, и только тогда, когда:

$$(x \& 8 \neq 0) \text{ или } (x \& 2 \neq 0) \text{ или } (x \& 1 \neq 0).$$

Введем предикаты: выражение $(x \& 11 \neq 0)$ будем описывать предикатом E_{11} . Но E_{11} описывает три единицы, значит, записывается как дизъюнкция базисных предикатов (в этих заданиях используются числа только из базиса двойки):

$$E_{11} = E_8 + E_2 + E_1.$$

Исследуемое выражение будет записано следующим образом:

$$((E_{11} + \overline{E_{35}}) \rightarrow E_{11}) + (\overline{E_A} \cdot \overline{E_{11}}).$$

Сначала выполним преобразования, не переходя к базисным предикатам:

$$\begin{aligned} & ((\overline{E_{11} + E_{35}}) + E_{11}) + (\overline{E_A} \cdot \overline{E_{11}}) = \\ & = \overline{E_{11}} \cdot \overline{E_{35}} + E_{11} + (\overline{E_A} \cdot \overline{E_{11}}) = E_{35} + E_{11} + \overline{E_A}. \end{aligned}$$

По записи понятно, что выражение будет тождественно истинным, если вместо A взять любое из чисел 11 и 35. Но эти числа не входят в базис двоичной системы, значит, напрямую складывать нельзя.

Перейдем к базисным предикатам:

$$\begin{aligned} E_{35} + E_{11} + \overline{E_A} &= E_{32} + E_2 + E_1 + E_8 + E_2 + E_1 + \overline{E_A} = \\ &= E_{32} + E_2 + E_1 + E_8 + \overline{E_A}. \end{aligned}$$

Теперь можно осуществить обратный переход от базисных предикатов:

$$E_{32} + E_2 + E_1 + E_8 + \overline{E_A} = E_{43} + \overline{E_A}.$$

Наибольшее число — 43.

Анализируя это выражение, можем перечислить все числа, при которых выражение будет истинным: 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43.

Можно в этом задании перейти к геометрической модели: E_A — множество точек внутри круга, $\overline{E_A}$ — точки за его пределами.

$E_{32} + E_2 + E_1 + E_8$ — объединение четырех кругов. Круги в этом случае пересекаются так, что любые два имеют общие точки, но еще должны пересекаться любые три, и четыре круга тоже имеют общие точки. Поэтому геометрическая модель с построением кругов, соответствующих базисным предикатам, трудоемка в построении и чтении. Объединение двух кругов, соответствующих предикатам E_2 и E_1 , записывается с помощью предиката E_3 , а всех четырех — E_{43} .

Ответ: 43.

В последнем задании все утверждения сравнивались с 0. Рассмотрим измененное задание.

Задание 10.

Определите **наибольшее** натуральное число A , такое, что выражение:

$$(x \& 14 \neq 6) \vee (x \& 15 = 7) \vee (x \& A = 0)$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x).

Решение.

Рассмотрим, в каком случае побитовая конъюнкция числа x с 15 дает 7. $x \& 15 = 7$, если в двоичном представлении числа x младшие три разряда (0, 1, 2) равны 1, а в третьем разряде стоит 0. Формализованная запись этого выражения записывается как конъюнкция базисных предикатов:

$$\overline{E_8} \cdot E_4 \cdot E_2 \cdot E_1.$$

$x \& 14 = 6$ запишется как $\overline{E_8} \cdot E_4 \cdot E_2$, а $x \& 14 \neq 6$ истинно в том случае, если будет истинно высказывание $E_8 + \overline{E_4} + \overline{E_2}$.

Запишем исследуемое выражение с помощью базисных предикатов и выполним преобразование по законам логики:

$$\begin{aligned} E_8 + \overline{E_4} + \overline{E_2} + \overline{E_8} \cdot E_4 \cdot E_2 \cdot E_1 + \overline{E_A} &= \\ &= E_8 + \overline{E_4} + \overline{E_2} + E_1 + \overline{E_A}. \end{aligned}$$

Выражение обратится в истину, если $A = 1$, или $A = 8$, или $A = 9$.

Ответ: 9.

Обычно в заданиях с побитовой конъюнкцией или в аналогичных заданиях на делимость не используют операции тождества и исключаящего «или». Изложенная в статье методика перехода к базисным предикатам позволяет по той же схеме решать и эти задания.

Задание 11.

Для какого **наименьшего** неотрицательного целого десятичного числа A выражение:

$$((x \& 12 \neq 0) \oplus (x \& 5 \neq 0)) \rightarrow ((x \& A \neq 0) \wedge (x \& 4 = 0))$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)?

Решение.

Запишем выражение через предикаты и избавимся от импликации:

$$(E_{12} \oplus E_5) \rightarrow (E_A \cdot \overline{E_4}) = (E_{12} \equiv E_5) + (E_A \cdot \overline{E_4}).$$

Тождество $(E_{12} \equiv E_5)$ запишем с использованием операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (СДНФ):

$$(E_{12} \cdot E_5) + (\overline{E_{12}} \cdot \overline{E_5}).$$

Далее распишем через базисные предикаты:

$$\begin{aligned} ((E_8 + E_4) \cdot (E_4 + E_1)) + (\overline{E_8} \cdot \overline{E_4} \cdot \overline{E_1}) + (E_A \cdot \overline{E_4}) &= \\ &= E_4 + E_8 \cdot E_1 + \overline{E_8} \cdot \overline{E_4} \cdot \overline{E_1} + E_A \cdot \overline{E_4} = \\ &= E_4 + E_8 \cdot E_1 + \overline{E_8} \cdot \overline{E_1} + E_A. \end{aligned}$$

Так как предикат E_A без отрицания, ответ следует искать в выражениях с отрицанием. Это

$$\overline{E_8} \cdot \overline{E_1} = \overline{E_8 + E_1} = \overline{E_9}.$$

Построим множество, соответствующее известной части этого выражения (рис. 14).

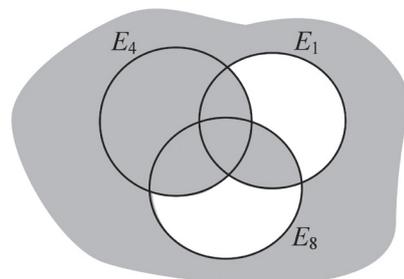


Рис. 14

Круг множества истинности предиката E_A должен закрыть белые части круга 8 и круга 1. Минимальное зна-

чение A , при котором белая зона будет закрыта, включает в себя объединение множеств, описанных предикатами E_1 и E_8 . Можно выполнить проверку, подставив в полученное выражение значение $A = 9$.

Ответ: 9.

Сформулируем общие правила, которых следует придерживаться при решении задания 18.

1. Записать с помощью предикатов условие задачи.
2. Используя законы логики, свести полученное выражение к выражению, записанному минимальным количеством предикатов и операциями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция. Если требовалось по условию найти условия, при которых «всегда ложно», можно применить отрицание для анализа истинности выражения.
3. Перейти к записи выражения через предикаты, описывающие единственное свойство объекта. Продолжить преобразования на основании законов логики и свойств объекта.
4. Изобразить множество описываемых в задании объектов с помощью геометрической модели, обращая особое внимание на возможность пересечения и полного включения одного множества в другое.

5. Заштриховать ту часть, на которую не влияет искомый параметр.
6. Описать незакрашенное множество математически.
7. Подставить найденное число в исходное выражение и посмотреть, будет ли выражение тождественно истинным.
8. Записать ответ.

Список использованных источников

1. Босова Л. Л., Босова А. Ю. Информатика. 10 класс: учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 288 с.
2. Босова Л. Л., Мирончик Е. А.. Множества в задачах с анализом битовых цепочек // Информатика в школе. 2017. № 7. С. 44–47.
3. Герасименко Н. И. Задачи 18 с делителями в КИМ ЕГЭ по информатике // Преподавание, наука и жизнь: сайт Константина Полякова. <http://kpolyakov.spb.ru/download/del18.pdf>
4. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Мнемозина, 2013. 264 с.
5. Коница Н. Л. Задачи 18 с делимостью // Преподавание, наука и жизнь: сайт Константина Полякова. <http://kpolyakov.spb.ru/download/ege18del.pdf>
6. Поляков К. Ю. Подготовка к ЕГЭ по информатике // Преподавание, наука и жизнь: сайт Константина Полякова. <http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm>

НОВОСТИ

Опорные школы РАН заработают с сентября

Опорные школы Российской академии наук (РАН) заработают с 1 сентября, заявила министр просвещения Ольга Васильева.

В конце февраля президент РАН Александр Сергеев сообщил, что пилотный проект базовых школ начнется в этом году.

«Действительно, школы начнут работать с 1 сентября 2019 года, то есть это будущий учебный год», — сказала Васильева в эфире программы «Утро России» на телеканале «Россия 1».

«Если вы посмотрите на географию отобранных школ, то они находятся в регионах, где есть институты Россий-

ской академии наук, есть федеральные университеты, есть центры научно-исследовательские. Понятно, что главная задача — это с малых лет воспитать человека, который свяжет свою жизнь с наукой», — добавила министр.

Ранее РАН и Минпросвещения выступили с инициативой передачи около сотни ведущих школ в стране из муниципального подчинения в региональное, чтобы областные министерства образования уделяли больше внимания именно этим школам, которые станут базовыми для российской науки и будут готовить одаренных детей к дальнейшей карьере исследователей. Всего в пилотном проекте примут участие 110 школ из 32 субъектов РФ.

(По материалам «РИА Новости»)

Российская академия образования планирует начать исследования современных детей до конца года

Российская академия образования (РАО) планирует начать исследования современных детей в 2019 году. Об этом в ходе заседания научно-экспертного совета при председателе Совета Федерации, посвященного обсуждению основных направлений законодательного обеспечения реализации послания президента РФ, сообщил президент РАО Юрий Зинченко.

«Новые исследования, которые Российская академия образования в этом году начинает вместе с Министерством науки и высшего образования, Министерством просвещения — это целенаправленное, регулятивное

исследование детства. Мы принимаем массу решений, закрепляем их даже законодательно, но при этом абсолютно не знаем современного ребенка, поэтому нам необходимо исследование начать, они не одного года, тем не менее это большая работа, которую мы начинаем», — заявил Ю. Зинченко.

Ранее СМИ сообщали, что в Министерстве здравоохранения России планируют возобновить изучение детей, чтобы понять, какие опасности и риски могут быть у современного ребенка. Такие исследования детей в России не проводились более 50 лет.

(По материалам Агентства новостей «Москва»)